Примерно решение на домашно №1 по Дискретни Структури, специалност Информатика, първи курс, летен семестър на 2017/2018 г.

Зад. 1 Нека A е множество от естествени числа. Нека $|A| = n$, където $n \geqslant 3$. Нека

$$B = \{(x, y, z) \in A^3 \mid x < y < z\}$$
$$C = \{(x, y, z) \in A^3 \mid x \leqslant y \leqslant z\}$$

Намерете $|B|$, $|C|$ и $|C \backslash B|$ като функции на n.

Решение: Съществува очевидна биекция между наредените тройки от различни числа от A, наредени в нарастващ ред, и триелементните подмножества на A. Тогава $|B| = \binom{n}{3}$.

Съществува очевидна биекция между наредените тройки от не непременно различни числа от A, на редени в ненамаляващ ред, и триелементите мултимножества с елементи, взети от A. Тогава $|C| = \binom{3+n-1}{3} = \binom{n+2}{3}$.

$|C \backslash B| = \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n}{6}\left(n^2 + 3n + 2 - n^2 + 3n - 2\right) = \frac{n}{6}(6n) = n^2.$

Зад. 2 Нека C е окръжност. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}^+$, за всяко множество A от $2n$ точки от C, за всяко разбиване на $\{A_1, A_2\}$ на A, такова че $|A_1| = |A_2|$, е вярно следното. Съществува точка $a \in A_1$, такава че при пълна обиколка около окръжността, започваща (и завършваща) в a, за всеки момент от обикалянето е вярно, че броят на точките от A_1, които сме срещнали до момента, е поне колкото броя на точките от A_2, които сме срещнали до момента.

Решение: По индукция по n. Базата е за $n = 1$. Тогава имаме една червена и една синя точка, и твърдението е очевидно вярно. ✓

Нека твърдението е вярно за всяко разполагане на $n-1$ червени и $n-1$ сини точки върху окръжността за някое $n > 1$. Да разгледаме произволно разполагане на n червени и n сини точки. Очевидно съществува такава червена точка r и такава синя точка b, че r и b са съседи върху окръжността по посока на часовниковата стрелка в смисъл, че ако се движим от r нататък, първата червена или синя точка, на която попадаме, е точка b. Да премахнем цветовете на точките r и b, което ще рече, да ги махнем съответно от множеството на червените и на сините точки. Получаваме окръжност с множество от $n-1$ червени и $n-1$ сини точки и индуктивното предположение е в сила. Съгласно него, поне една от червените, $n-1$ на брой, точки е такава, че ако започнем да обикаляме от нея, във всеки момент броят на срещнатите червени е поне колкото броят на срещнатите сини. Да наречем тази червена точка x. Сега да върнем цветовете на r и b. С други думи, връщаме се към конфигурацията от n червени и n сини точки. Тъй като между r и b цветни точки няма и r е преди b в посока по часовниковата стрелка, то, ако правим пълна обиколка от x до x по часовниковата стрелка, остава в сила, че винаги броят на червените точки е поне колкото броят на сините:

- преди да достигнем до r, това е в сила от индуктивното предположение;
- достигайки r, вече е вярно, че броят на червените е по-голям от броя на сините до момента, защото по отношение на индуктивното предположение, r е допълнителна червена точка;
- достигайки b, със сигурност е вярно, че броят на червените е поне колкото броя на сините до момента, защото приносът на b нулира приноса на r;
- нататък от b чак до x, остава в сила, че броят на червените винаги е поне колкото броят на сините, и това е от индуктивното предположение – сега приносът на r и b е точно нула. ✓

Зад. 3 Нека $D = \{0, 1, 2\}$ и нека $R \subseteq D^3 \times D^3$ е релацията:

$$(a, b, c) R (x, y, z) \leftrightarrow ac \equiv xz \pmod 3$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Намерете броя на класовете на еквивалентност на R

в) Намерете броя на елементи във всеки клас на еквивалентност на R.

Решение:

а) Ще докажем, че R е рефлексивна. Наистина, всяка наредена тройка $(a, b, c) \in D^3$ е в релация със себе си, понеже $ac \equiv ac \pmod 3$ от рефлексивността на релацията еквивалентност по модул. ✓

Ще докажем, че R е симетрична. Наистина, ако за две наредени двойки $(a, b, c), (x, y, z) \in D^3$ е вярно, че $(a, b, c)\mathsf{R}(x, y, z)$, то по дефиниция това означава, че $ac \equiv xz \pmod 3$. Но тогава $xz \equiv ac \pmod 3$ от симетричността на релацията еквивалентност по модул, което означава, че $(x, y, z)\mathsf{R}(a, b, c)$. ✓

Ще докажем, че R е транзитивна. Наистина, ако за три наредени двойки $(a, b, c), (x, y, z), (\alpha, \beta, \gamma) \in D^3$ е вярно, че $(a, b, c)\mathsf{R}(x, y, z)$ и $(x, y, z)\mathsf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$, то по дефиниция това означава, че $ac \equiv xz \pmod 3$ и $xz \equiv \alpha\gamma \pmod 3$. Но тогава $ac \equiv \alpha\gamma \pmod 3$ от транзитивността на релацията еквивалентност по модул, което означава, че $(a, b, c)\mathsf{R}(\alpha, \beta, \gamma)$. ✓

б) Добре известно е, че има три възможни остатъка при делене на три, а именно 0, 1 и 2. Всеки клас на еквивалентност на R се определя от остатъка при делене на три на произведението от първия и третия елемент. Множеството от тези произведения е $\{0, 1, 2, 4\}$. Тогава множеството от остатъците е точно $\{0, 1, 2\}$. Следователно, класовете на еквивалентност са точно три.

в) Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 0 при делене на 3 са точно тези, които имат 0 на първа или трета позиция, без значение на елемента на втора позиция. Тези, които имат 0 на първа позиция, са 9 на брой, защото по толкова начина може да запълним другите две позиции (на всяка може три различни елемента). Аналогично, тези, които имат 0 на третата позиция, са също 9. Тройките, които имат 0 и на първа, и на трета позиция, са 3 на брой. Съгласно принципа на включването и изключването, отговорът е $9 + 9 - 3 = 15$.

Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 1 при делене на 3 са точно тези, които имат

- 1 на първа и на трета позиция. Те са 3 на брой.
- 2 на първа и на трета позиция. Те са 3 на брой.

Общо това са 6 наредени тройки.

Наредените тройки, произведението на първия и третия елемент от които дава остатък 2 при делене на 3 са точно тези, които имат

- 1 на първа и 2 на трета позиция. Те са 3 на брой.
- 2 на първа и 1 на трета позиция. Те са 3 на брой.

Общо това са 6 наредени тройки.

И така, класовете на еквивалентност имат 15, 6 и 6 елемента.

Зад. 4 Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

а) Намерете f, ако $g(x) = 2x + 1$ и $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$.

б) Намерете g, ако $f(x) = 3x - 1$, $(g \circ f)(x) = 6x + 5$ и g е линейна функция, тоест $g(x) = ax + b$ за някакви $a, b \in \mathbb{R}$.

Решение:

а) Щом $g(x) = 2x + 1$, то $g(f(x)) = 2f(x) + 1$. Дадено е, че $(g \circ f)(x) = 2x^2 - 3$, но това е същото като $g(f(x)) = 2x^2 - 3$. Тогава $2f(x) + 1 = 2x^2 - 3$, откъдето $f(x) = x^2 - 2$.

б) Търсим a и b, такива че $g(x) = ax + b$. Щом $f(x) = 3x - 1$, то $g(f(x)) = a(3x - 1) + b = 3ax + b - a$, така че $(g \circ f)(x) = 3ax - a + b$. От друга страна, дадено е, че $(g \circ f)(x) = 6x + 5$. Тогава

$$\left| \begin{aligned} 3a &= 6 \\ -a + b &= 5 \end{aligned} \right.$$

откъдето веднага получаваме $a = 2, b = 7$. И така, $g(x) = 2x + 7$.