Примерно решение на семестриално контролно по Дискретни Структури, специалност Информатика, първи курс, летен семестър на 2017/2018 г.

Зад. 1 Докажете, че ако $x \in A \to x \in C \wedge x \notin B$, то $\overline{\overline{B} \cap \overline{C}} \setminus B = \overline{B} \cap (C \cup A)$.

Решение: $x \in A \to x \in C \wedge x \notin B$ е еквивалентно на $A \subseteq C \setminus B$.

A	B	C	$\overline{B}$	$\overline{C}$	$\overline{B} \cap \overline{C}$	$\overline{\overline{B} \cap \overline{C}}$	$\overline{\overline{B} \cap \overline{C}} \setminus B$	$C \cup A$	$\overline{B} \cap (C \cup A)$
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	0	0	1	0	1	0

Редовете в сиво са редовете, за които не е вярно, че $A \subseteq C \setminus B$.

Осма и десета колона имат съвпадат в неоцветените редове, което доказва твърдението.

Зад. 2 Докажете, че сред произволни $n+1$ цели числа можем да намерим две, чиято разлика се дели на n.

Решение: Нека A е произволно множество от $n+1$ цели числа. Всички остатъците при деление на n са числата $0, 1, \ldots, n-1$. Това са n различни цели числа. Тогава от принципа на Дирихле, следва че съществуват a и b - елементи на A, които дават един и същ остатък на n. Нека a, b са такива. Тогава съществуват $a_1, b_1, r \in \mathbb{Z}$, такива че $a = a_1 n + r$, $b = b_1 n + r$ и $0 \leq r < n$. Така $a - b = (a_1 - b_1)n$, което е цяло число кратно на n.

Зад. 3 Нека $L = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$. Гласните букви от L са буквите A, E и I.

а) По колко начина можем да наредим буквите от L в редица, която да започва с A и да завършва с I или да започва с I и да не завършват с A?

б) По колко начина можем да наредим буквите от L в редица, в която всяка гласна е на четна позиция?

Решение: Ще използваме идеята за поставяне на топки в кутии. В случая кутиите са позициите в редицата, топките са буквите от L.

а) Случай 1 Броят на начините за нареждане на елементите на L в редица, която започва с A и завършва с I е $7!$, защото при фиксирана първа и последна буква изборът на останалите букви съотвества на пермутация на елементите $\{B, C, D, E, F, G, H\}$.

Случай 2 Броят на начините за нареждане на елементите на L в редица, която започва с I и не завършва с A е $7 \times 7!$. Фиксираме I да е първият елемент на редицата. Избираме една от от седем позиции (от втора до осма), на която да поставим буквата A. Избора за поставяне на останалите букви съотвества на пермутация на седем елемента.

Множеството от редици от **Случай 1** и множеството от редици от **Случай 2** представляват разбиване на множеството от търсени редици. Тогава от принципа на събирането броят на търсените редици е $7! + 7 \times 7! = 8 \times 7! = 8!$.

б) Гласните букви от L са буквите A, E и I. Четните позиции са втора, четвърта, шеста и осма. Тогава четните букви могат да се поставят по $4 \times 3 \times 2 = 24$ начина. Поставянето на съгласните букви на останалите позиции съотвества на пермутация на шест елемент. От комбинаторния принцип на умножението получаваме за броят на търсените редици е $24 \times 6!$.

Зад. 4 Нека $S = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 10x + y \in \{0, 1, 2, \ldots, 49, 50\}\}$ и нека $R \subseteq S \times S$ е релацията:

$$(x, y)R(a, b) \leftrightarrow xy = ab$$

а) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

б) Намерете $[(0, 0)]$. Припомнете си, че $[(0, 0)]$ е класът на еквивалентност, на който принадлежи $(0, 0)$.

Решение: Първо ще напишем S в явен вид:

$$\begin{aligned} S = \big\{&(0,0), (0,1), \ldots, (0,50),\\ &(1,0), (1,1), \ldots, (1,40),\\ &(2,0), (2,1), \ldots, (2,30),\\ &(3,0), (3,1), \ldots, (3,20)\\ &(4,0), (4,1), \ldots, (4,10)\\ &(5,0)\big\} \end{aligned}$$

а) Ще докажем, че R е рефлексивна. За всяка двойка $(x, y) \in S$ е изпълнено $xy = xy$, следователно R е рефлексивна ✓

Ще докажем, че R е симетрична. Наистина, ако за две наредени двойки $(x, y), (a, b) \in S$ е вярно, че $(x, y)R(a, b)$, то по дефиниция това означава, че $xy = ab$. Но тогава $ab = xy$ от симетричността на релацията равенство на естествени числа, което означава, че $(a, b)R(x, y)$. ✓

Ще докажем, че R е транзитивна. Наистина, ако за три наредени двойки $(x, y), (a, b), (\alpha, \beta) \in S$ е вярно, че $(x, y)R(a, b)$ и $(a, b)R(\alpha, \beta)$ то по дефиниция това означава, че $xy = ab$ и $ab = \alpha\beta$. Но тогава $xy = \alpha\beta$ от транзитивността на релацията равенство на естествени числа, което означава, че $(a, b)R(\alpha, \beta)$. ✓

б)

$$\begin{aligned} [(0,0)] &= \{(x, y) \in S \,|\, xy = 0\}\\ &= \{(x, y) \in S \,|\, x = 0 \vee y = 0\}\\ &= \{(x, 0) \,|\, x \in \{0, 1, \ldots, 5\}\} \cup \{(0, x) \,|\, x \in \{0, 1, \ldots, 50\}\}\\ &= \{(0,0), (0,1), \ldots, (0,50), (1,0), (2,0), (3,0), (5,0)\} \end{aligned}$$

Зад. 5 Използвайте метода на математическата индукция за да докажете, че броят на непразните подмножества на множество с n елемента е $2^n - 1$.

Решение:
База: Единственото подмножество на празното множество е празното множество. Тоест празното множество няма непразни подмножества. ✓
Индукционна хипотеза: Допускаме, че броят на непразните подмножества на кое да k елементно множество е $2^k - 1$.
Индукционна стъпка: Нека A е произволно множество с $k + 1$ елемента и нека $a \in A$ е произволен елемент. Нека $B = A \setminus \{a\}$. Тогава $|B| = k$. От индукционната хипотеза B има $2^k - 1$ непразни подмножества. Подмножествата на A се разбиват на подмножествата, които съдържат a и тези,

които не го съдържат. Очевидно има биекция между двата вида подмножества. Подмножествата съдържащи елемента a са непразни, понеже те се получат като към всяко подмножество на B се добави елмента a. B има $2^k - 1$ непразни подмножества и едно единствено празно подмножество. Тогава броят на непразните подмножесва на A е $2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$. ✓
Заключение: За всяко ествено число n е вярно, че произволно множество с n елемента има $2^n - 1$ непразни подмножества.

Зад. 6 Разполагаме с бели, сини и жълти жетони, по неограничено много от всеки цвят. По колко различни начина можем да наредим n жетона един над друг във вертикална "кула", за някое $n \geq 1$, така че нито два бели жетона да не са съседни?

а) Съставете рекурентно уравнение за задачата.

б) Решете това уравнение.

Решение: Нека a_n е търсеното количество. Очевидно $a_1 = 3$ и $a_2 = 8$.

Да си представим построяването на такава "кула" от n жетона отдолу нагоре за някакво $n \geq 3$. Ако започнем с бял жетон, това означава, че вторият жетон не може да бъде бял, инак бихме имали два съседни бели жетона. Следователно, следващият жетон трябва да е син или жълт. За всяка от тези възможности **няма** ограничение за третия жетон, от което следва, че след като сме започнали с два жетона (бял и син или жълт над него), можем да довършим конструкцията по a_{n-2} начина, тъй като всяка валидна кула от $n-2$ жетона може да бъде поставена отгоре над тези двата. И така, има $2a_{n-2}$ начина да се направи конструкцията, ако започнем с бял жетон. Множителят 2 идва от двата избора на втори жетон, който не е бял.

От друга страна, ако първият жетон е жълт, можем да довършим конструкцията по точно a_{n-1} начина. Аналогично, ако първият жетон е син, пак можем да довършим конструкцията по точно a_{n-1} начина.

Съгласно комбинаторният принцип на събирането, $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ за $n > 2$. Тогава търсеното рекурентно уравнение е

$$a_n = \begin{cases} 3, & \text{ако } n = 1 \\ 8, & \text{ако } n = 2 \\ 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{ако } n > 2 \end{cases}$$

То е хомогенно линейно рекурентно уравнение с константни коефициенти и крайна история. Характеристичното уравнение е $x^2 - 2x - 2 = 0$. Мултимножеството от корените е $\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}_M$. Общото решение е

$$a_n = A(1+\sqrt{3})^n + B(1-\sqrt{3})^n$$

за някакви константи A и B. Тях намираме от началните условия:

$$\left| \begin{aligned} A(1+\sqrt{3}) + B(1-\sqrt{3}) &= 3 \\ A(1+\sqrt{3})^2 + B(1-\sqrt{3})^2 &= 8 \end{aligned} \right.$$

Лесно се извежда, че $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогава

$$a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1+\sqrt{3})^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)(1-\sqrt{3})^n$$