ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ

(ИЗПИТ — СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2016 / 2017 УЧ. Г.)

Задача 1. Докажете, че числото $\binom{2n}{n}$ е четно при всяко цяло положително n.

Задача 2. Намерете пораждащата функция на редицата на Фибоначи:
$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ за всяко цяло $n \geq 3$.

Задача 3. Двама приятели А и Б играят на ези-тура. След всяко хвърляне, ако се падне ези — Б дава 1 лв. на А; ако се падне тура — А дава 1 лв. на Б. Каква е вероятността след осем хвърляния А да има 4 лв. повече, отколкото в началото на играта?

Задача 4. Дадени са $2n$ точки, разположени водоравно. По колко начина можем да ги свържем с n дъгички? Дъгичките трябва да минават над точките и не бива да се пресичат. Всяка точка може да бъде край само на една дъгичка. Например при $n = 3$ има $2n = 6$ точки; те могат да се свържат по пет начина.

№ 1 № 2 № 3 № 4 № 5

Задача 5. Докажете неравенството $\operatorname{ex}(n, K_{1,r}) \leq \left\lfloor \dfrac{n(r-1)}{2} \right\rfloor$, където $K_{1,r}$ е пълният двуделен граф с един връх в първия дял и r върха във втория дял, $\operatorname{ex}(n, K_{1,r})$ е максималният брой ребра, които може да има граф с n върха, несъдържащ подграф, изоморфен на $K_{1,r}$.

Задача 6. Двама приятели играят върху неориентиран граф следната игра. Отначало първият играч поставя пионка върху избран от него връх на графа. След това вторият играч мести пионката по избрано от него ребро на графа. После първият играч мести пионката по ребро на графа и т.н. (редуват се). Пионката не бива да посещава връх, в който вече е била. Губи този играч, който няма ход. Кой от двамата играчи има печеливша стратегия?

Упътване: Разгледайте два случая — да има и да няма пълно сдвояване.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 може да се реши поне по шест различни начина.

Първи начин: чрез инволюция. Нека S е множеството на всички n-елементни подмножества на някое $2n$-елементно множество. Тогава $|S| = C_{2n}^{n} = \binom{2n}{n}$.

Определяме $f(B) = \overline{B}$ (допълнението до $2n$-елементното множество), $\forall B \in S$. Изображението f има вида $f: S \to S$, защото $\left|\overline{B}\right| = 2n - \left|B\right| = 2n - n = n$. Понеже $\overline{\overline{B}} = B$, то $f(f(B)) = B$, т.е. f е инволюция. От $\overline{B} \neq B$, т.е. $f(B) \neq B$, следва, че инволюцията f няма неподвижни точки. Ето защо f разбива S на ненаредени двойки $\left\{B,\ \overline{B}\right\}$, следователно S има четен брой елементи, т.е. $|S| = \binom{2n}{n}$ е четно число.

Втори начин: с теоремата на Люка. Тъй като $n > 0$, то има поне една единица в двоичния запис на n. Нека $n = ...1000...0_{(2)}$ завършва на k нули (може и нито една, т.е. $k \geq 0$); следователно $(k+1)$-ата цифра отдясно наляво в двоичния запис на n е единица. Следователно $2n = ...10000...0_{(2)}$ завършва на $k+1$ нули. По теоремата на Люка

$$\binom{2n}{n} \equiv .... \binom{0}{1}.\binom{0}{0}.\binom{0}{0}...\binom{0}{0} = ...\ 0\ .\ 1\ .\ 1\ ...\ 1 = 0 \pmod 2.$$

Последните k множителя са единици, $(k+1)$-ият множител отдясно наляво е 0, останалите множители (ако има такива) не са важни. Произведението е нула, тъй като съдържа нулев множител.

И така, $\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod 2$, т.е. числото $\binom{2n}{n}$ е четно за всяко цяло $n > 0$.

Трети начин: чрез свойствата на биномните коефициенти.

От комбинаторното тъждество $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, в сила за цели положителни k, следва, че $\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n}\binom{2n-1}{n-1} = 2\binom{2n-1}{n-1}$ е четно число, тъй като $\binom{2n-1}{n-1}$ е цяло число. Биномният коефициент $\binom{2n-1}{n-1}$ има смисъл, защото $n \geq 1$ е цяло.

Четвърти начин: чрез свойствата на биномните коефициенти.
От комбинаторното тъждество

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\cdots+\binom{2n}{n-1}+\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n+1}+\cdots+\binom{2n}{2n-1}+\binom{2n}{2n}=2^{2n},$$

като съобразим, че коефициентите, равноотдалечени от краищата, са равни, т.е.

$$\binom{2n}{0}=\binom{2n}{2n},\quad \binom{2n}{1}=\binom{2n}{2n-1},\ \ldots\ ,\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n+1},$$

следва, че

$$\binom{2n}{n}+2\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\cdots+\binom{2n}{n-1}\right]=4^{n}.$$

Тогава

$$\binom{2n}{n}=4^{n}-2\left[\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}+\cdots+\binom{2n}{n-1}\right]$$

е четно число, защото и умаляемото, и умалителят са четни числа. По-точно, умалителят е четен заради множителя 2 и защото биномните коефициенти (събираемите в скобите) са цели числа. А умаляемото е четно, защото 4 е четно и защото числото n е цяло положително.

Пети начин: чрез тъждеството на Паскал.
От комбинаторното тъждество

$$\binom{a}{b}=\binom{a-1}{b}+\binom{a-1}{b-1},\quad \text{в сила за цели положителни } a \text{ и } b,$$

следва, че

$$\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n}+\binom{2n-1}{n-1}\quad \text{за всяко цяло } n>0.$$

От тъждеството

$$\binom{a}{b}=\binom{a}{a-b}$$

следва, че

$$\binom{2n-1}{n}=\binom{2n-1}{n-1},$$

откъдето намираме:

$$\binom{2n}{n}=\binom{2n-1}{n-1}+\binom{2n-1}{n-1}=2\binom{2n-1}{n-1}\quad \text{за всяко цяло } n>0.$$

Това е четно число, защото последният биномен коефициент е цяло число.

Шести начин: с формулата за разлагане на $n!$ ***на прости множители.*** За всяко цяло положително число n и за всяко просто число p е вярно, че най-високата степен на p, която дели $n!$, е равна на

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$$

Сумата изглежда безкрайна, но съдържа само краен брой ненулеви събираеми: от известно място нататък всички събираеми са равни на нула.

Тази формула се доказва така: първото събираемо е броят на целите числа от 1 до n включително, които се делят на p. Всяко от тях дава един множител p в разлагането на $n!$ на прости множители. Но числата, делящи се на p^2, дават по два множителя p, а са броени само веднъж, затова техният брой е добавен допълнително — това е второто събираемо. Аналогично, числата, кратни на p^3, дават по три множителя p, а дотук са броени два пъти, затова добавяме броя им допълнително — това е третото събираемо. И тъй нататък.

От равенството $\dbinom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ следва, че е достатъчно да докажем, че най-високата степен на простото число $p = 2$, деляща числителя, е по-голяма от най-високата степен на 2, деляща знаменателя. Така в числителя остава несъкратена двойка и резултатът е четно число. Че важи нестрого неравенство, е ясно, защото стойността на този израз е цяло число — броят на комбинациите без повторение на $2n$ елемента от n-ти клас. Остава да установим, че е в сила строгото неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor > 2\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

където множителят 2 в дясната страна идва от втората степен в знаменателя на биномния коефициент.

Преобразуваме лявата страна на неравенството:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{2n}{2^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^{k-1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = n + \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor,$$

след което то приема вида:

$$n + \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor > 2\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor, \quad \text{тоест} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < n.$$

Това неравенство се доказва така:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{2^k} = n.$$

Равенството следва от формулата за сбор на безкрайна геометрична прогресия, а строгото неравенство — от това, че поне едно събираемо вдясно е дробно.

Решение на задача 2. Първите няколко члена на редицата на Фибоначи са

$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8$ и тъй нататък.

Нека $F(x) \;=\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n x^n \;=\; x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + \ldots$

е пораждащата функция на редицата на Фибоначи. Следователно

$$x\,F(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+1} \;=\; \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n \;, \quad x^2 F(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n+2} \;=\; \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n .$$

Затова $\quad x\,F(x) + x^2 F(x) \;=\; \sum\limits_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum\limits_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n ,\quad$ т.е.

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; F_1 x^2 \;+\; \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-1} x^n \;+\; \sum_{n=3}^{\infty} F_{n-2} x^n .$$

Заместваме $F_1 = 1$:

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; x^2 \;+\; \sum_{n=3}^{\infty} \left(F_{n-1} + F_{n-2}\right) x^n .$$

От рекурентното уравнение получаваме:

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; x^2 \;+\; \sum_{n=3}^{\infty} F_n x^n , \quad \text{т.е.}$$

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; x^2 \;- F_1\, x - F_2\, x^2 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n .$$

Заместваме $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$:

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; x^2 \;-\; x \;-\; x^2 \;+ F(x), \quad \text{т.е.}$$

$$\left(x + x^2\right) F(x) \;=\; F(x) \;-\; x ,$$

$$\left(1 - x - x^2\right) F(x) \;=\; x ,$$

затова пораждащата функция на редицата на Фибоначи е $F(x) \;=\; \dfrac{x}{1 - x - x^2} \cdot$

Решение на задача 3. Тази игра е случайно лутане по целочислените точки с начало точката (0, 0); x е времето, y е печалбата на играча А. От т. $(x,\, y)$ процесът отива с еднаква вероятност в т. $(x+1,\, y+1)$ или в т. $(x+1,\, y-1)$, т.е. всичките $2^8 = 256$ траектории са равновероятни. Благоприятни за събитието "играчът А завършва с печалба от 4 лв." са траекториите с край т. (8, 4). Те са $C_8^{\,2} = 28$ на брой, а вероятността на събитието е $28 / 256 \;=\; 7 / 64 \;\approx 11\,\%$.

Решение на задача 4. Номерираме точките отляво надясно с числата от 1 до $2n$. Най-дясната точка (№ $2n$) може да бъде свързана чрез дъгичка само с точка с нечетен номер $(2k + 1)$, та извън дъгичката да останат четен брой точки: $2k$, вътре в дъгичката — също четен: $2(n - k - 1)$. Иначе ще има несвързани точки.

Нека b_n е търсеният брой начини за свързване на всичките $2n$ точки. Точките извън споменатата дъгичка могат да бъдат свързани по b_k начина; тези вътре в дъгичката — по b_{n-k-1} начина; общо — по $b_k\, b_{n-k-1}$ начина. Следователно $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k\, b_{n-k-1}$, където условно приемаме, че $b_0 = 1$.

Пресмятаме първите няколко члена на тази редица:

$$b_0 = 1,\quad b_1 = 1,\quad b_2 = 2,\quad b_3 = 5,\quad b_4 = 14 \quad \text{и т.н.}$$

Да направим съпоставка с редицата от числата на Каталан:

$$c_1 = 1,\quad c_2 = 1,\quad c_3 = 2,\quad c_4 = 5,\quad c_5 = 14,\ \ldots\ ,\quad c_n = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\,n!},\ \ldots$$

Възниква предположението, че $b_n = c_{n+1}$. То се доказва чрез математическа индукция с помощта на двете рекурентни уравнения — изведеното по-горе и уравнението за редицата от числата на Каталан, известно от теорията: $c_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\, c_{n+1-k}$.

Окончателно, $b_n = c_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}\dbinom{2n+1}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}$ е търсеният брой.

Решение на задача 5. Един граф G не съдържа подграф, изоморфен на $K_{1,\,r}$, тогава и само тогава, когато степените на всички върхове на G са по-малки от r, тоест $d(v_i) \leq r - 1$ за $\forall i = 1, 2, 3, \ldots, n$. За броя m на ребрата на G важат съотношенията: $m = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} d(v_i) \leq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}(r-1) = \dfrac{n(r-1)}{2}$. С други думи, $m \leq \dfrac{n(r-1)}{2}$. Понеже m е цяло число, то $m \leq \left\lfloor \dfrac{n(r-1)}{2} \right\rfloor$.

Решение на задача 6. Ако в графа има пълно сдвояване, печели вторият играч: той винаги мести пионката по ребрата от пълното сдвояване, а първият играч е принуден да мести по ребра извън сдвояването. Следователно вторият играч винаги има ход и печели играта.

Ако в графа няма пълно сдвояване, тогава печели първият играч. За целта той избира едно сдвояване с максимален брой ребра. Понеже то не е пълно, има поне един връх, непокрит от ребрата на сдвояването. В началото на играта първият играч поставя пионката върху произволно избран непокрит връх. Както и да играе вторият играч, той ще премести пионката върху покрит връх (иначе реброто, по което я е преместил, би могло да се добави към сдвояването, което противоречи на неговата максималност). Първият играч мести пионката по реброто от сдвояването. Ако вторият играч има ход, той води отново към покрит връх (иначе ребрата, по които пионката е била местена до момента, образуват удължаващ път, следователно сдвояването не е максимално, което е противоречие). Тогава за първия играч пак има ребро от сдвояването, по което ребро да премести пионката. Тези разсъждения важат и за следващите ходове. Следователно първият играч винаги има ход, затова печели играта.