

ЗАДАЧИ ПО БУЛЕВИ ФУНКЦИИ.

Съдържание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Теоретична основа | 1 |
| 1.1 | Дефиниция на “булева функция” | 1 |
| 1.2 | Булеви вектори | 1 |
| 1.3 | Променливи | 2 |
| 1.4 | Композиция | 3 |
| 1.5 | Обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция | 3 |
| 1.6 | Представяния на булеви функции | 4 |
| 1.6.1 | Представяне чрез вектор (канонично представяне) | 4 |
| 1.6.2 | Представяне чрез схеми от функционални елементи | 5 |
| 1.6.3 | Представяне чрез хиперкуб | 8 |
| 1.6.4 | Представяне чрез формули | 13 |
| 1.7 | Пълнота на множества от булеви функции | 15 |
| 1.8 | Съвършена дизюнктивна нормална форма на булева функция | 15 |
| 1.9 | Съвършена конюнктивна нормална форма на булева функция | 17 |
| 1.10 | Разни | 18 |
| 2 | Задачи | 18 |
| 3 | Благодарности | 36 |

1 Теоретична основа

1.1 Дефиниция на “булева функция”

$J_2 \stackrel{\text{деф}}{=} \{0, 1\}$. $J_2^n \stackrel{\text{деф}}{=} \underbrace{J_2 \times J_2 \times \cdots \times J_2}_n$. Булева функция на n променливи е всяка функция $f: J_2^n \rightarrow J_2$ за някое $n \geq 1$.

Можем да дефинираме и булеви функции на 0 променливи. 0-кратното декартово произведение е $\{()\}$, следователно домейнът е едноелементен и има точно две булеви функции на 0 променливи, които булеви функции отъждествяваме с двете булеви константи 0 и 1.

Множеството от всички булеви функции на n променливи е \mathcal{F}_2^n . Множеството от всички булеви функции е

$$\mathcal{F}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_2^n$$

1.2 Булеви вектори

Елементите на J_2^n са *булевите вектори с дължина n* . За краткост изпускаме прилагателното “булеви” (понеже не разглеждаме други вектори) и казваме просто “ n -вектори” или дори само “вектори”, ако броят на елементите е без значение. Ползваме удобната конвенция имената на векторите да бъдат записвани с удебелени букви (в полиграфията се казва “получерен

шрифт”, на английски е *boldface*), например **b**. Ако сме дефинирали някакво име на n -вектор, да кажем **b**, то неговите елементи именуваме със същото име, само че тях изписваме с нормално дебели букви (*regular face*), например $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. За удобство може да запишем това и като $\mathbf{b} = b_1 b_2 \dots b_n$.

Нека $x, y \in J_2$. $x \stackrel{\text{деф}}{=} \bar{y}$ тстк

$$x = \begin{cases} 1, & \text{ако } y = 0 \\ 0, & \text{ако } y = 1 \end{cases}$$

Противоположни вектори са вектори с една и съща дължина, които се различават във всеки елемент. Например, ако **a** и **b** са n -вектори, те са противоположни, ако

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}: a_i = \bar{b}_i$$

Факта, че **a** и **b** са противоположни, записваме накратко така: $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}$. Добре известно е, че $\overline{\bar{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$, така че $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}} \leftrightarrow \bar{\mathbf{a}} = \bar{\bar{\mathbf{b}}} = \mathbf{b}$.

1.3 Променливи

Нека f е булева функция на n променливи. За какви променливи става дума? Всяка булева променлива се асоциира с точно едно от множествата J_2 от домейна $\underbrace{J_2 \times J_2 \times \dots \times J_2}_n$. Иначе

казано, домейнът е множество от вектори, 2^n на брой, и всяка от n -те позиции в тези вектори е (по-точно, се асоциира с) булева променлива – тя може да взема стойности 0 или 1 независимо от стойностите на другите позиции. Имената на променливите обикновено записваме с x_1, x_2 и така нататък, а факта, че f е функция на n променливи, записваме по познатия начин: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ако е даден запис “ $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ”, ние заключаваме, че става дума за функция точно на n променливи не от това, че има n позиции, на които са написани имена на променливи, а от това, че имената на променливи са **две по две различни**. Ако има повтаряне на имена на променливи, което е допустимо, то казваме, че сме *идентифицирали* променливите, които имат едно и също име. В такъв случай, функцията е на по-малко променливи. Например, ако е даден запис “ $f(x_1, x_2, x_1, x_1, x_1)$ ”, то става дума за функция на две променливи, а не за функция на пет променливи (колкото са позициите около запетайте в скобите). В този случай казваме, че сме идентифицирали първата, третата, четвъртата и петата променлива.

Имената, които даваме на променливите, **нямат значение**. Няма значение дали пишем $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ или $f(x, y, z, u, v)$ или $f(a_{10}, b_{15}, a_{30}, b_{31}, a_2)$ – това са различни записи на **една и съща** булева функция[†]. Обаче, ако започнем да идентифицираме променливи като например в $f(x_1, x_2, x_1, x_1, x_1)$, то това в общия случай е **друга** булева функция.

Променливата x_i се нарича *фиктивна*, ако

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

за **всяка стойност** на $(n - 1)$ -вектора $x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} x_{i+2} \dots x_n$. Променлива, която не е фиктивна, се нарича *съществена*.

[†]При условие, че f е дадена булева функция на пет променливи и че всички символи, които сме използвали в скобите, са имена на булеви променливи.

1.4 Композиция

Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ са булеви[†] функции. *Композицията на g на мястото на x_i във f е функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$.* Това е функция, която е **различна** (в общия случай) и от f , и от g . Ако се интересуваме от изчисляването на тази функция, процедура за нейното изчисляване може да се получи от процедури за изчисляването на f и на g .

Колко са променливите на функцията-композиция? Ако е изпълнено $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \dots, y_m\} = \emptyset^{\ddagger}$, то композицията е функция на $n+m-1$ променливи. Например, ако са дадени $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и $g(x_6, x_7, x_8)$, то композицията $f(x_1, x_2, x_3, g(x_6, x_7, x_8), x_5)$ е функция на $5+3-1 = 7$ променливи. Възможно е обаче $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cap \{y_1, \dots, y_m\} \neq \emptyset$. Тогава множеството от променливите на функцията-композиция е $(\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}) \cup \{y_1, \dots, y_m\}$. Например, ако са дадени $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ и $g(x_1, x_2, x_8)$, то композицията $f(x_1, x_2, x_3, g(x_1, x_2, x_8), x_5)$ е функция на $5 + 3 - 1 - 2 = 5$ променливи.

Ако g_1, g_2, \dots, g_n са булеви функции съответно на m_1, \dots, m_n променливи, а именно

$$\begin{aligned} &g_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}) \\ &g_2(y_{2,1}, \dots, y_{2,m_2}) \\ &\dots \\ &g_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,m_n}) \end{aligned}$$

то композицията на g_1 на мястото на x_1 , на g_2 на мястото на x_2, \dots , на g_n на мястото на x_n е булевата функция:

$$f(g_1(y_{1,1}, \dots, y_{1,m_1}), g_2(y_{2,1}, \dots, y_{2,m_2}), \dots, g_n(y_{n,1}, \dots, y_{n,m_n}))$$

1.5 Обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция

Нека f_1 е булевата функция конюнкция. Нека x_1, x_2, x_3 и x_4 са булеви променливи. Всеки от следните записи:

$$f_1(x_1, x_2) \quad f_1(x_1, x_3) \quad f_1(x_1, x_4) \quad f_1(x_2, x_3) \quad f_1(x_2, x_4) \quad f_1(x_3, x_4)$$

е допустим. От друга страна, следните записи:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) \quad f_1(x_2, x_3, x_4) \quad f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

са, от формална гледна точка, **недопустими**, понеже конюнкцията е функция на точно две променливи, а не на повече.

На практика обаче ние говорим за конюнкция на много променливи. Как става това? Ако трябва да сме напълно прецизни, конюнкцията на повече от две променливи не е функцията f_1 , а друга функция, която се получава от f_1 чрез подходяща серия от композиции. Като пример да разгледаме следните пет функции:

$$\begin{aligned} &f_1(f_1(f_1(x_1, x_2), x_3), x_4) && f_1(x_1, f_1(x_2, f_1(x_3, x_4))) && (1) \\ &f_1(f_1(x_1, x_2), f_1(x_3, x_4)) \\ &f_1(f_1(x_1, f_1(x_2, x_3)), x_4) && f_1(x_1, f_1(f_1(x_2, x_3), x_4)) \end{aligned}$$

[†] Не е необходимо тези f и g да са **булеви** функции, за да може говорим за композиция. Композиция на функцията g на мястото на x_i във функцията f е мислима дори когато f и g са произволни функции при условие, че кодомейнът на g е същият като i -ия домейн на f . Казано на програмистки жаргон, при условие, че типът на изхода на g е същият като типа на i -ия вход на f .

[‡] С други думи, ако променливите на f без x_i , от една страна, и променливите на g , от друга страна, нямат общи елементи.

Всяка от тези пет функции е функция на четирите променливи x_1, x_2, x_3 и x_4 . Лесно се вижда, че тези функции отговарят биективно на петте[†] начина за групиране на променливите. Прочее, тези пет функции са равни—по-прецизно казано, (1) съдържа пет записа на една и съща функция—поради асоциативността на конюнкцията. Лесно се вижда освен това, че и всяка друга линейна наредба на променливите, да кажем $x_2x_4x_1x_3$ би довела до същото — функцията на четири променливи си остава същата; това пък е заради комутативността на конюнкцията.

И така, функцията от (1) е пример за *обобщена конюнкция*. Това ще рече, функция на две или повече променливи, която се получава от обикновената конюнкция чрез серия от композиции. Очевидно, обобщената конюнкция има стойност единица тстк всичките ѝ променливи са единици.

Напълно аналогично дефинираме и *обобщена дизюнкция*: функция на две или повече променливи, която се получава от обикновената дизюнкция чрез серия от композиции; тя има стойност единица тстк поне една от променливите ѝ е единица.

1.6 Представяния на булеви функции

1.6.1 Представяне чрез вектор (канонично представяне)

По дефиниция, всяка булева функция на n променливи е множество от наредени двойки, 2^n на брой, първият елемент от които е n -вектор, а вторият, булева стойност (0 или 1). Въпросните n -вектори са *входните вектори*. Това име има смисъл, ако си представяме булевата функция като алгоритъм, който по даден вход (n -вектор) връща булева стойност.

Ето пример за булева функция на 3 променливи:

$$f = \{((0, 0, 0), 0), ((0, 0, 1), 1), ((0, 1, 0), 1), ((0, 1, 1), 0), ((1, 0, 0), 1), ((1, 0, 1), 0), ((1, 1, 0), 0), ((1, 1, 1), 1)\}$$

Можем да опишем тази функция много по-прегледно с таблица:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

В таблицата са дадени имена на променливите, което не е необходимо, за да определим функцията. Нещо повече. Ако се разберем, че 3-векторите са подредени отгоре надолу лексикографски, както е в случая, не е необходимо да ги пишем, за да определим функцията. Бихме могли да я определим само чрез колоната от нейните стойности (в случая 8 на брой):

[†]Странична забележка: в комбинаториката, n -тото число на Catalan, което записваме като C_n , е броят на всички начини дадена линейна наредба на $n + 1$ елемента, взети от някакво множество A , да бъде скобувана така, че дадена бинарна операция над A да бъде приложена над въпросната линейна наредба. В конкретния пример, множеството A е $\{0, 1\}$, броят на обектите е 4, бинарната операция е f_1 , а линейната наредба е $x_1x_2x_3x_4$. Действително, $C_3 = 5$, което точно отговаря на броя на функциите в (1).

| |
|---|
| f |
| 0 |
| 1 |
| 1 |
| 0 |
| 1 |
| 0 |
| 0 |
| 1 |

За да пестим място при писането, записваме функцията не като колона, а хоризонтално:

$$f = 01101001$$

Това е *каноничното представяне* на булева функция: вектор от 2^n на брой булеви стойности, с имплицитното допускане, че входните вектори са подредени лексикографски. Ако се опитаме да определим функцията чрез вектор, чиято дължина **не** е точна степен на двойката, например

$$g = 010110$$

то това представяне е **невалидно**, тоест не задава никаква булева функция.

1.6.2 Представяне чрез схеми от функционални елементи

Да допуснем, че са ни дадени устройства, всяко от които има нула или повече входове и точно един изход. На входовете се подават булеви стойности. **За всяка** комбинация от булеви стойности на входовете, на изхода “излиза” булева стойност, еднозначно определена от това, което е подадено на входовете. Входовете са именувани, тоест всеки вход си има идентичност. Ако броят на входовете е n , то всяко такова устройство реализира някаква булева функция на n променливи, като всеки вход се смята за една булева променлива. Всяко такова устройство наричаме *функционален елемент*[†]. За целите на този курс ние разглеждаме само идеализирани функционални елементи, но такива функционални елементи може да бъдат реализирани физически, което е в основата на цифровата схемотехника.

Ще изобразяваме функционалните елементи примерно така:



Елементът се рисува с нещо като полукръг, като входовете, в случая те са три на брой и са номерирани с 1, 2 и 3, са откъм правата част, а изходът, който **винаги** е точно един, е от заоблената част. Името на функцията е написано върху елемента. Естествено, функцията трябва да е такава, че броят на променливите ѝ да е точно равен на броя на входовете на елемента. Ако се разберем, че входовете са номерирани отляво надясно, можем спокойно да изпускате изписването на номерата им; в такъв случай същият функционален елемент би бил нарисован така:

[†]На английски терминът е *gate*.



Да допуснем, че f е следната функция:

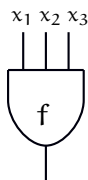
$$f = 01101001$$

Тогава върху входния вектор 001, f има стойност 1. Това изобразяваме ето така:

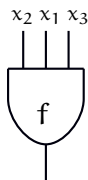


Очевидно допускаме, че има посока на “движение на информацията”, която е винаги от входовете към изхода.

Булевите функции, които разглеждаме, са над някакво множество от булеви променливи. Когато разглеждаме схеми от функционални елементи, отговарящи на някакви булеви функции, удобно е да си представяме, че променливите “текат” по “жиците”[†], които влизат във входовете на функционалните елементи. Например, ако искаме да изобразим функционален елемент, съответстващ на $f(x_1, x_2, x_3)$, правим такава диаграма:



Подчертаваме, че следното свързване на входовете на функционалния елемент към трите променливи е **съществено различно**:

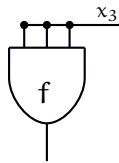


[†] Реалните функционални елементи са електронни устройства, по чиито жици текат токове и има напрежения, като напреженията се **интерпретират** като нули или единици. Идеализираните функционални елементи, които разглеждаме тук, са абстракции и при тях за токове и напрежения не става дума. Върху техните “жици” “текат” нули и единици. При реалните функционални елементи имат някакви закъснения—в природата нищо не се случва мигновено—така че при всяка промяна на входовете е необходимо някакво време, типично от порядъка на наносекунди или пикосекунди при модерните върхови цифрови електронни схеми. Идеализираните функционални елементи, които разглеждаме тук, нямат закъснения и при тях сигналите се разпространяват неограничено бързо.

по същите причини, поради които $f(x_1, x_2, x_3)$ в общия случай е различна функция от $f(x_2, x_1, x_3)$ [†]. Възможно е на повече от един входове на функционалния елемент да се подава една и съща входна променлива. Например:



Това отговаря на $f(x_3, x_3, x_3)$. Подчертаваме, че това е функция на **една променлива**, а не на три променливи. Същата ситуация можем да илюстрираме и със следната диаграма:



Тук се вижда по-ясно, че променливата е само една. Трите черни точки подчертават, че хоризонталната “жица”, по която “тече” x_3 , е свързана с всяка от трите вертикални жици, които са входовете на функционалния елемент[‡]. Тази фигура илюстрира добре понятието “идентифициране на променливите на булева функция”, което въведохме на стр. 2. Сами съобразете, че щом $f = 01101001$, то $f(x_3, x_3, x_3)$ всъщност е функцията идентитет- x_3 .

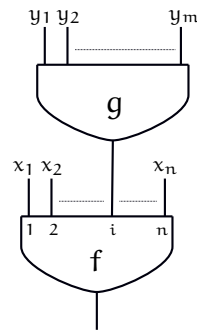
Използвайки каскадно свързани функционални елементи можем много елегантно да илюстрираме композицията на функция на мястото на променлива на друга функция. Както в Подсекция 1.4, нека $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \dots, y_m)$ са булеви функции. Съответните им функционални елементи си представяме така:



Тогава композицията на g на мястото на x_i във f се описва, в термините на функционалните елементи, като свързване на изхода на елемента на g към i -ия вход на елемента на f :

[†]В някои случаи тези функции може да съвпадат. Вижте Подсекция 1.10.

[‡]Ако използваме електротехническа терминология, можем да кажем, че всички входове на функционалния елемент са дадени “на късо” и по тях “тече” x_3 .

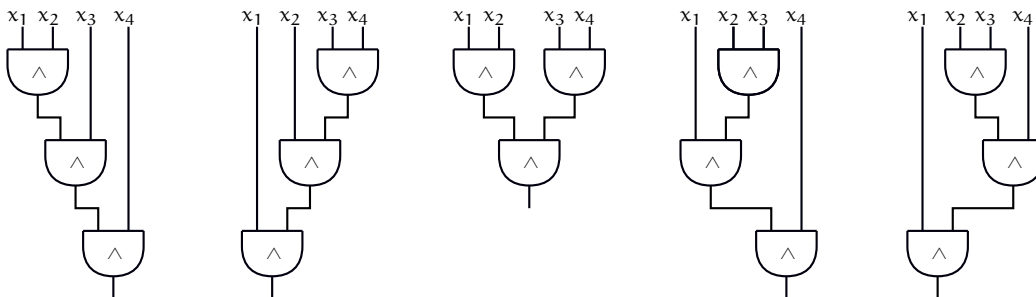


i -ият вход продължава да съществува, но вече не е именуван с “ x_i ”, защото променлива x_i вече няма в смисъл, че не се ползва. Активните променливи, с други думи, тези, които се ползват, са $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$. Тази каскада от функционални елементи реализира функцията $f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, g(y_1, y_2, \dots, y_m), x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$.

Функциите обобщена конюнкция и обобщена дизюнкция, за които стана дума в Подсекция 1.5, може да се илюстрират чрез каскадни свързвания на функционални елементи тип конюнкция или дизюнкция. Нека ето този функционален елемент реализира булевата функция конюнкция:



Тогава петте композиции от (1) могат да бъдат представени така:



Както се каза в Подсекция 1.5, поради асоциативността на конюнкцията, петте композиции от (1) са всъщност пет начина да бъде написана една и съща функция. Следователно, петте различни свързвания на функционални елементи от последната фигура реализират една и съща функция, а именно обобщена конюнкция на четири променливи.

1.6.3 Представяне чрез хиперкуб

Понякога е много удобно да мислим за булевите функции на n променливи в термините на *хиперкуб*. n -мерен хиперкуб е обобщение на редицата от геометрични обекти точка, отсечка, квадрат, куб и така нататък:

- точката е 0-мерен хиперкуб, който е атомарен в смисъл, че няма структура,
- отсечката е 1-мерен хиперкуб, състоящ се от 2 точки и едномерния обект, който ги свързва—можем да кажем, в някакъв смисъл, “който е ограден от тях”,
- квадратът е 2-мерен хиперкуб, състоящ се от 4 точки, 4 отсечки и двумерния обект, ограден от тях,
- кубът е 3-мерен хиперкуб, състоящ се от 8 точки, 12 околни ръба, 6 квадрата и тримерния обект, ограден от тях,
- и така нататък.

От тази гледна точка, n -мерният хиперкуб е общият член на тази редица. Той е геометричен обект в n -мерното пространство. Може да мислим за хиперкуба като за обект, състоящ се от:

- 2^n точки, които са върховете му,
- $n2^{n-1}$ отсечки, които са околните му ръбове,
- $\binom{n}{2}2^{n-2}$ квадрата, които са околните му стени,
- $\binom{n}{3}2^{n-3}$ куба,
- и така нататък
- $\binom{n}{n-1}2^{n-(n-1)} = 2n$ на брой, $(n-1)$ -мерни обекта,
- един n -мерен обект, ограден от $(n-1)$ -мерните обекти.

Лесно се вижда, че k -мерните компоненти на n -мерния хиперкуб са $\binom{n}{k}2^{n-k}$ на брой.

Може да пренебрегнем геометричния аспект на хиперкуба и да мислим за него като за чисто комбинаторен обект по следния начин:

- Върховете му са векторите от J_2^n . Това са 0-мерните компоненти на n -мерния хиперкуб.
- Два вектора са *съседни* тогава и само тогава, когато се различават в точно една позиция. Например, ако $n = 3$, векторите 001 и 011 се различават в точно една позиция (втората) и те задават един околел ръб на 3-мерния хиперкуб. И така, всеки околел ръб се идентифицира с двата върха, които му притадлежат, а те се различават в точно една позиция. С други думи, 1-мерните компоненти са всички (ненаредени) двойки вектори, които се различават в точно една позиция.
- Аналогично, всяка околел стена се идентифицира с четирите върха, които ѝ принадлежат. С други думи, 2-мерните компоненти са всички (ненаредени) четворки вектори, такива че има точно две позиции, в които тези четири вектора се различават.
- Аналогично, 3-мерните компоненти са всички (ненаредени) осморки вектори, такива че има точно три позиции, в които се различават.
- И така нататък.
- n -мерната компонента е точно една: това е множеството от всички, 2^n на брой, n -вектори.

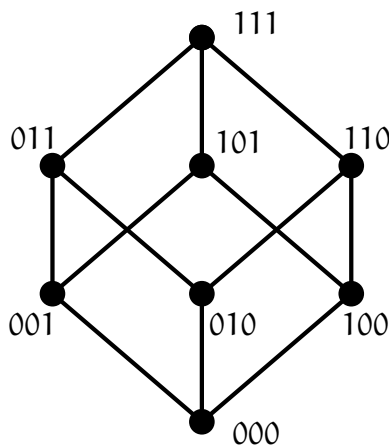
Тогава общият брой компоненти на n -мерния хиперкуб е:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \\ &= \sum_{0 \geq -k \geq -n} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{n \geq n-k \geq 0} \binom{n}{n-k} 2^{n-k} = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = 3^n \end{aligned}$$

Като пример да разгледаме 3-мерния хиперкуб, записан **напълно подробно**:

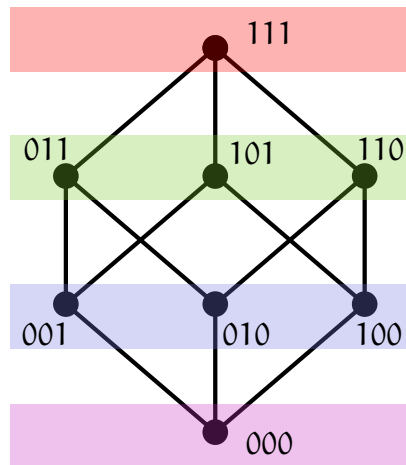
$$\left\{ \begin{array}{l} \{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}, \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}, \quad //8 \text{ върха} \\ \{000, 100\}, \{000, 010\}, \{010, 011\}, \{001, 011\}, \{000, 100\}, \{001, 101\}, \\ \{011, 111\}, \{010, 110\}, \{100, 101\}, \{101, 111\}, \{111, 110\}, \{110, 100\} \quad //12 \text{ рѐба} \\ \{000, 001, 011, 010\}, \{000, 100, 101, 001\}, \{001, 101, 111, 011\}, \\ \{010, 110, 100, 000\}, \{010, 110, 111, 011\}, \{100, 101, 111, 110\}, \quad //6 \text{ стени} \\ \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \quad //1 \text{ обем} \end{array} \right\}$$

Обикновено хиперкубът се рисува като граф: само върховете и страните. Това означава, че 0-мерните и 1-мерните компоненти се изобразяват, а останалите, не. Така е много по-прегледно. Но ние знаем, че хиперкубът като комбинаторен обект е съвкупност от обектите от всички размерности, от 0 до n [†]. Ето типично изображение на 3-мерния хиперкуб:

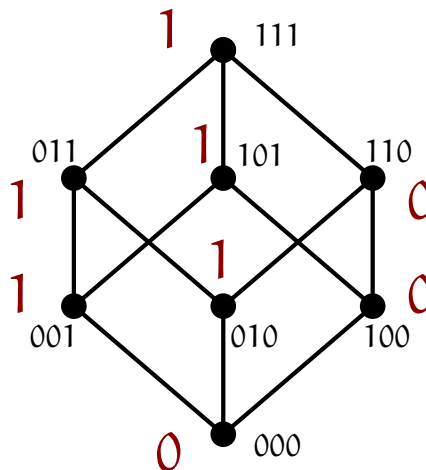


Върховете на n -мерния хиперкуб се разбиват на $n + 1$ *слоя*. Върховете от един слой са точно тези вектори, които имат един и същи брой единици. Броят на единиците може да е $0, 1, \dots, n$, затова и слоевете са $n + 1$. Когато говорим за слой k , $0 \leq k \leq n$, имаме предвид слоя от векторите, всеки от които има точно k единици. Очевидно слой k има $\binom{n}{k}$ вектора в себе си. Ето същия хиперкуб, като четирите слоя са указани с различни цветове:

[†] Ако говорим за *граф-хиперкуб*, тогава имаме предвид обекта, който е съвкупност само от 0-мерните компоненти (върховете) и 1-мерните компоненти, които в този контекст наричаме “ребра”. n -мерен граф-хиперкуб не е същото нещо като n -мерен хиперкуб: графът-хиперкуб е подмножество на хиперкуба. Хиперкубът съдържа и компонентите от размерности ≥ 2 .



Всяка булева функция на n променливи може да бъде разглеждана като асоцииране на всеки връх на n -мерния хиперкуб (помним, че върховете му са точно n -векторите) с една булева стойност. Например, функцията $f = 01101001$ от миналата подсекция се изобразява върху хиперкуба така:



Стойностите на функцията върху векторите са написани с червено.

От казаното дотук изглежда, че каноничното представяне на дадена булева функция и представянето чрез хиперкуб са едно и също нещо. Всъщност, разлика има и тя е само в наредбата на векторите. При каноничното представяне, векторите са наредени лексикографски[†], а при представянето с хиперкуб те са наредени от частичната наредба \preceq , дефинирана по следния начин:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} : a_i \leq b_i) \tag{2}$$

[†]Лексикографската наредба е линейна.

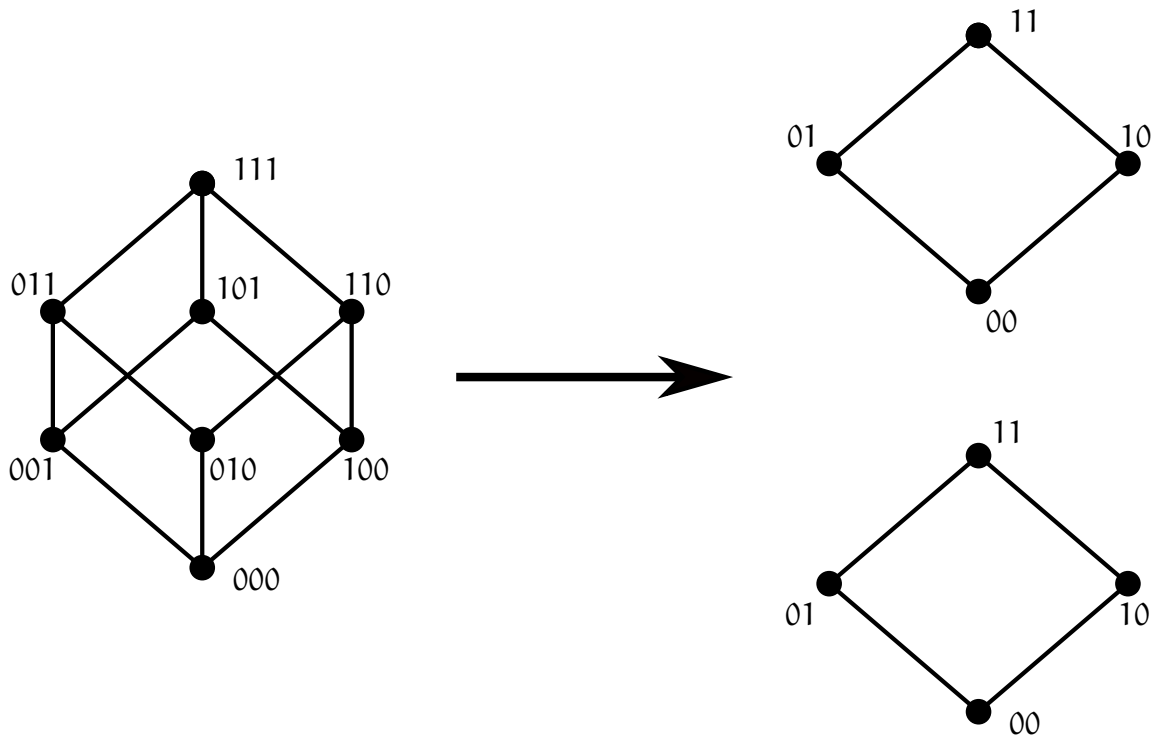
Това е частична наредба, която не е линейна, понеже има двойки вектори, които не са сравними (спрямо нея), например 011 и 100. Тази частична наредба е полезна за осмислянето на различни понятия и решаването на много задачи от областта на булевите функции. На горния пример всъщност е показана диаграмата на Hasse на частичната наредба \preceq върху 3-векторите.

Както казахме вече, съседни вектори са такива, които се различават в точно една позиция[†]. Съседството на вектори може да осмислим и в термините на хиперкуба: два негови вектора са съседни, ако са в съседни слоеве. Съседство на вектори може да осмислим и чрез релацията \preceq (виж (2)). А именно, ако \mathbf{a} и \mathbf{b} са n -вектори, то те са съседни тогава и само тогава, когато $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ или $\mathbf{b} \prec \mathbf{a}$, където релацията \prec се дефинира така:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in J_2^n : \mathbf{a} \prec \mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a} \preceq \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \wedge \neg \exists \mathbf{c} (\mathbf{a} \preceq \mathbf{c} \preceq \mathbf{b}) \quad (3)$$

Например, $0010 \prec 0011$ и $0010 \prec 1010$, но $0010 \not\prec 1111$, въпреки че $0010 \preceq 1111$.

Срязване на n -мерния хиперкуб в i -тата дименсия е понятие, което първо ще онагледим с пример. Ето срязване на 3-мерния хиперкуб във втората дименсия:



За удобство, нека да мислим за хиперкуба като за граф-хиперкуб, тоест съвкупност от върхове и ребра. Срязването се състои в премахване на i -тата позиция на всички вектори-върхове, след което тяхната дължина става $n - 1$, и премахването на точно тези ребра, които са от вида:

$$\{\alpha 0 \beta, \alpha 1 \beta\}$$

където α е булев вектор с дължина $i - 1$, а β е булев вектор с дължина $n - i$. В примера със срязването на 3-мерния хиперкуб във втората дименсия, ребрата, които махаме, са точно

$$\{000, 010\}, \{001, 011\}, \{100, 110\}, \{101, 111\}$$

[†] Освен това, за да говорим за съседство на вектори, трябва те да имат една и съща дължина. При вектори с различни дължини за съседство не може да става дума.

Ако гледаме на хиперкуба не като на граф, а като на “истински” хиперкуб с компоненти от всички възможни размерности, ясно е, че срязването води до изчезването на n -мерната компонента, както и до намаляването на броя на k -мерните компоненти от $\binom{n}{k}2^{n-k}$ на $\binom{n-1}{k}2^{n-k-1}$, тъй като резултатът от срязването е появата на два нови хиперкуба, всеки с размерност $n-1$.

От казаното досега може да не е ясно защо настояваме да се казва, че срязваме именно в i -тата размерност. Например, на последната фигура от един куб се получават два квадрата и по нищо не личи точно в коя от трите размерности е бил срян куба. Отговорът на тази забележка е, че хиперкубът ни интересува в контекста на булевите функции, когато върховете му са “маркирани” с нули или единици – стойностите на булевата функция. При срязването асоциацията между върхове и стойности на функцията **се запазва**, така че в общия случай резултатът от срязването в различни размерности е **различен**.

1.6.4 Представяне чрез формули

Формула е чисто синтактично понятие. Средношколското разбиране за “формула” е “прост алгоритъм”, например “формулата за лицето на кръг с радиус r е $S = \pi r^2$ ”. Тук ние възприемаме съвсем друго разбиране за “формула”. Формула е всеки стринг, конструиран над дадена азбука съгласно дадени правила. Етимологията на думата е следната: на латински “formula” е умалително от “forma”. Не е грешка да казваме “форма” вместо “формула”.

Формулите на булевите функции може да се дефинират индуктивно по следния начин. Да фиксираме изброимо безкрайно множество от булеви променливи $\{x_0, x_1, \dots\}$. Нека Σ е азбуката:

$$\Sigma = \{f, x, 0, 1, \dots, \textcircled{0}, \textcircled{1}, \textcircled{,}, \textcircled{,}\}$$

С червено са записани буквите от езика, който ще опишем, а именно езика от формулите на булевите функции, а с черно са буквите от метаезика, който използваме, за да опишем езика от формулите на булевите функции. Нека $\Sigma_d = \{0, 1, \dots, 9\}$. Нека $\tilde{\Sigma}$ е множеството от стрингове над Σ_d , които са валидни записи[†] на числа в десетична позиционна бройна система. Нека ι е стандартната десетична позиционна бройна система, тоест биекцията

$$\iota : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{N}$$

която знаем от училище. Нека t е произволно изброяване на всички булеви функции, тоест биекция $t : \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathbb{N}$. За удобство можем да вземем най-простото и естествено изброяване на булевите функции:

- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f \in \mathcal{F}_2^n$ и $g \in \mathcal{F}_2^{n+1}$, то $t(f) < t(g)$,
- за всяко $n \in \mathbb{N}$, ако $f, g \in \mathcal{F}_2^n$ и $f \neq g$, то $t(f) < t(g)$ тогава и само тогава, когато каноничното представяне на f предхожда лексикографски каноничното представяне на g .

Нека изброените от t булеви функции са f_0, f_1 и така нататък. Тогава дефинираме “формула на булева функция” чрез следната индуктивна дефиниция.

Определение 1 (Формулите на булевите функции). Всеки стринг $\phi \in \Sigma^+$ е *формула на булева функция* тогава и само тогава, когато в сила е точно едно от двете:

- **База.** $\phi = x\alpha$, където $\alpha \in \tilde{\Sigma}$

[†]Например 0017 не е валиден запис заради двете водещи нули.

- **Индуктивна стъпка.** $\phi = f\alpha(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ където $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ са формули на булеви функции, $\alpha \in \tilde{\Sigma}$ и $t^{-1}(i(\alpha))$ има точно n променливи[†].

Въвеждаме и функцията ν , която се нарича *дълбочина на формулата*:

- В базовия случай, $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} 0$.
- В индуктивната стъпка, $\nu(\phi) \stackrel{\text{деф}}{=} \max\{\nu(\phi_1), \nu(\phi_2), \dots, \nu(\phi_n)\} + 1$

Неформално, ако си представим съответна реализация чрез функционални елементи, то дълбочината на схемата е максималният брой функционални елементи, през които трябва да премине сигналът. \square

Това дали дефинираме $x\alpha$ —запис на номерирана променлива—като формула или не, е въпрос на наш избор. Ако не желаем това, може да усложним Определение 1 или, което е по-просто решение, да дефинираме допълнително, че *истинска формула на булева функция* е всяка формула с дълбочина поне единица.

Дотук сме дефинирали, чисто синтактично, формулите на булевите функции. Не сме казали нищо за техния смисъл, или, иначе казано, за тяхната *семантика*. Семантиката можем да дефинираме, използвайки индуктивната дефиниция на синтаксиса, като аналогът на синтактичната операция “вмъкване на стринг на мястото на подстринг” (има се предвид вмъкването на формулите ϕ_i на местата на имената на променливите) е семантичната “композиция на функция на мястото на променлива в друга функция”. И така:

- семантиката на всяка формула с дълбочина нула $x\alpha$ е булевата променлива $x_{i(\alpha)}$.
- семантиката на всяка формула с дълбочина единица $f\alpha(x\beta_1, x\beta_2, \dots, x\beta_n)$, където $\beta_i \in \tilde{\Sigma}$ за $1 \leq i \leq n$, е булевата функция $f_i(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$, където $f_i = t^{-1}(i(\alpha))$ и x_{k_j} за $1 \leq j \leq n$ е булевата променлива, чийто индекс k_j е $i(\beta_j)$.
- семантиката на всяка формула с дълбочина повече от единица $\phi = f\alpha(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ е композицията на семантиките на ϕ_1, \dots, ϕ_n на местата на съответно първата, \dots , n -тата променлива на функцията f_i , където $f_i = t^{-1}(i(\alpha))$.

Лесно се вижда, че при изредените правила булевата функция, която е семантиката на някаква формула, е **една единствена**, но обратното не е вярно: за всяка функция има **безброй много** формули, на които тя е семантика. Ако булевата функция f е семантиката на формулата ϕ ще казваме, че f *съответства на ϕ* .

Често срещана задача е: дадени са две формули, да се реши дали са еквивалентни, тоест дали съответната им булева функция е една и съща, или не. Това е частен случай на общата задача: дадени са два синтактични обекта (някакви стрингове, изградени по някакви правила), да се определи дали семантиката им е една и съща, или не, като семантиката е добре дефинирана функция.

Функциите, чиито формули ще използваме най-често, са “стандартните” булеви функции на две променливи: конюнкцията, дизюнкцията, импликацията, сумата по модул 2, стрелката на Peirce и чертата на Sheffer, а така също и отрицанието, което е функция на една променлива. Има смисъл множеството от функции, чиито формули ще се ползват, да бъде пълно множество (вж. Секция 1.7).

[†]Забележете, че $i(\alpha)$ е число, а $t^{-1}(i(\alpha))$ е една от всички булеви функции, защото $t^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{F}_2$.

1.7 Пълнота на множества от булеви функции

Нека $F \subseteq \mathcal{F}_2$. Неформално, множеството F е *пълно*, ако всяка булева функция $f \in \mathcal{F}_2$ може да бъде представена като композиция на функциите от F . Формално, нека $[F]$ означава затварянето на F спрямо композиция, като затварянето $[F]$ може да се дефинира чрез следната индуктивна дефиниция – $[F]$ е най-малкото множество, такова че:

- $[F]$ съдържа всички функции от F .
- Нека f е функция, която се съдържа в $[F]$. Нека f има n променливи за някакво $n \geq 1$. Нека идентифицираме някои от променливите на f . Получената функция се съдържа в $[F]$.
- Нека f и g са произволни функции от $[F]$. Нека f има n променливи за някакво $n \geq 1$. Тогава композицията на g на мястото на i -тата променлива на f също се съдържа в $[F]$, за $1 \leq i \leq n$.

И така, F е пълно множество, ако $[F] = \mathcal{F}_2$.

Теорема 1 (теорема на Boole). Множеството от трите булеви функции конюнкция, дизюнкция и отрицание е пълно. \square

1.8 Съвършена дизюнктивна нормална форма на булева функция

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи x_1, \dots, x_n за $n \geq 1$. *Литерал* ще наричаме всяко име на променлива или всяко име на променлива с черта отгоре (отрицание). Литералите от първия вид се наричаме *положителни*, а от втория – *отрицателни*. Веднага подчертаваме, че литералите са **формули** и като такива са качествено различни от самите променливи, понеже формулите са понятия от синтактичното ниво, а променливите са от по-високото семантично ниво. Това, че използваме един и същи запис “ x_1 ” и за името на променлива (което е формула), и за самата променлива, не води до объркване, защото опитният читател винаги може да разбере от контекста дали става дума за синтактичното ниво или за семантичното ниво. Примери за положителни литерали са x_1, x_4 и така нататък. Примери за отрицателни литерали са \bar{x}_1, \bar{x}_3 и така нататък.

Конюнктивна клауза е всяка непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са x_1, \dots, x_6 , примери за конюнктивни клаузи са $x_1x_3x_4, x_1\bar{x}_4, x_1x_2x_3x_4x_5x_6, \bar{x}_3, x_2\bar{x}_5\bar{x}_6$ и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

Пълна конюнктивна клауза е конюнктивна клауза, която съдържа точно n литерала. С други думи, това е непразна формула, която се състои от конкатенация на литерали, такива че всяко име на променлива се появява точно веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са x_1, \dots, x_6 , примери за пълни конюнктивни клаузи са $x_1x_2x_3x_4x_5x_6, x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5x_6$ и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

Дизюнктивна нормална форма, съкратено ДНФ, е формула, която се състои от една или повече различни[†] конюнктивни клаузи, свързани със символа “ \vee ”. В горния контекст,

[†]Кога две конюнктивни клаузи са различни? Ако настояваме индексите на променливите да са в нарастващ ред отляво надясно, то две конюнктивни клаузи са различни тук са различни като стрингове. Без това ограничение, можем да дефинираме “различни формули” и в частност различни конюнктивни клаузи чрез разлика в семантиките.

примери за ДНФ са $x_2\bar{x}_3x_4$, $x_1x_4 \vee x_2\bar{x}_5\bar{x}_6 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3$ и така нататък. *Свършена дизюнктивна нормална форма*, съкратено СЪВДНФ е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни конюнктивни клаузи. В горния контекст, пример за СЪВДНФ е $x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$.

Семантиката на литералите, конюнктивните клаузи и ДНФ е очевидната:

- Семантиката на всеки положителен литерал x_i е функцията идентитет- x_i . Семантиката на всеки отрицателен литерал \bar{x}_i е функцията отрицание-на- x_i .
- Семантиката на всяка конюнктивна клауза $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$, където λ_j са литерали за $1 \leq j \leq k$, е композицията $f_{\text{con}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$, където f_{con} е обобщената конюнкция на k променливи, а f_j е семантиката на λ_j , за $1 \leq j \leq k$.
- Семантиката на всяка ДНФ $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \cdots \vee \phi_k$, където ϕ_j е конюнктивна клауза за $1 \leq j \leq k$, е $f_{\text{dis}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$, където f_{dis} е обобщената дизюнкция на k променливи, а f_j е семантиката на ϕ_j , за $1 \leq j \leq k$.

Като пример да разгледаме формулата (тя е СЪВДНФ, ако $n = 6$)

$$\phi = x_1\bar{x}_2x_3x_4x_5x_6 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4\bar{x}_5\bar{x}_6$$

Очевидно, нейната семантика е булевата функция—да я наречем h —на шестте променливи x_1, \dots, x_6 , която има стойност 1 върху векторите 000000 и 101111 и има стойност 0 върху всички останали, 62 на брой, вектори. Сега да си представим, че трябва да запишем h чрез формула, изградена съгласно индуктивното Определение 1. Естествено, има безброй начини да сторим това, но нека се опитаме да напишем формула, която е аналогична на ϕ . Лесно се вижда, че ни трябва формули за функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция. Функцията h е равна на някаква композиция от тези функции[†], а именно на дизюнкция от някакви конюнкции. Аналогът на това в синтактичния свят на формулите е: че формула за h може да бъде получена, като във формула за дизюнкция заместим стринговете-имена на променливи с някакви формули за конюнкции.

Да направим формула за h точно по Определение 1, като използваме червен цвят за буквите f . Функциите отрицание, конюнкция и дизюнкция имат номера съответно 4, 7 и 13 в изброяването t , тоест, това са съответно f_4 , f_7 и f_{13} . Ето пример за формула, съответна на h :

$$\psi = f_{13}(f_7(x_1, f_7(f_4(x_2), f_7(x_3, f_7(x_4, f_7(x_5, x_6)))))), \\ f_7(f_4(x_1), f_7(f_4(x_2), f_7(f_4(x_3), f_7(f_4(x_4), f_7(f_4(x_5), f_4(x_6)))))))$$

Очевидно ϕ е несравнимо по-лека за четене от ψ , макар че са еквивалентни, имайки една и съща семантика. Може да възникне въпросът, защо изобщо ползваме тромавата конструкция на Определение 1, след като има начин да се записват еквивалентни формули, които са много по-лесни за четене. Отговорът е, че конструкцията на Определение 1 има чисто теоретично значение. Там искахме да дефинираме прецизно и кратко “формула” и “функция, съответна на формула”, а не сме имали за цел получените формули да са кратки и ясни. Говорейки за ДНФ искаме друго – кратък и много ясен запис на формулите. За тази цел е много по-удачно да се въведат литерали и конюнктивни клаузи и чрез тях и буквите “ \vee ” да се дефинират ДНФ.

Доказателството на теоремата на Boole се основава на факта, че всяка булева функция на ≥ 1 променливи, която не е константа-нула, има една единствена СЪВДНФ.

[†]Тази композиция не е единствена заради комутативността на дизюнкцията и конюнкцията.

1.9 Съвършена конюнктивна нормална форма на булева функция

Нека са фиксирани краен брой булеви променливи x_1, \dots, x_n за $n \geq 1$.

Дизюнктивна клауза е всяка непразна формула, която се състои от литерали, свързани със символа “ \vee ”, такива че всяко име на променлива се появява най-много веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са x_1, \dots, x_6 , примери за дизюнктивни клаузи са:

$$\begin{aligned} &x_1 \vee x_3 \vee x_4, \\ &x_1 \vee \overline{x_4}, \\ &x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6, \\ &\overline{x_3}, \\ &x_2 \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6} \end{aligned}$$

и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

Пълна дизюнктивна клауза е дизюнктивна клауза, която съдържа точно n литерала. С други думи, това е непразна формула, която се състои от литерали, свързани със символа “ \vee ”, такива че всяко име на променлива се появява точно веднъж – било като положителен, било като отрицателен литерал. Ако променливите са x_1, \dots, x_6 , примери за пълни дизюнктивни клаузи са:

$$\begin{aligned} &x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6, \\ &x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee x_6 \end{aligned}$$

и така нататък. Не е задължително, но е силно препоръчително имената да се записват отляво надясно в нарастващ ред на индексите.

Конюнктивна нормална форма, съкратено КНФ, е формула, която се състои от конкатенация на една или повече различни дизюнктивни клаузи, като, ако дизюнктивните клаузи са повече от една, всяка от тях е оградена от чифт скоби, в противен случай скоби не се ползват. В горния контекст, примери за КНФ са:

$$\begin{aligned} &x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4, \\ &(x_1 \vee x_4 \vee x_2 \vee \overline{x_5})(\overline{x_6} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \end{aligned}$$

и така нататък. *Съвършена конюнктивна нормална форма*, съкратено СъвКНФ е дизюнктивна нормална форма, в която участват само пълни дизюнктивни клаузи. В горния контекст, пример за СъвКНФ е $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5 \vee x_6)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5} \vee \overline{x_6})$.

Семантиката на КНФ е очевидната:

- Семантиката на всеки положителен литерал x_i е функцията идентитет- x_i . Семантиката на всеки отрицателен литерал $\overline{x_i}$ е функцията отрицание-на- x_i .
- Семантиката на всяка дизюнктивна клауза $\lambda_1 \vee \lambda_2 \vee \dots \vee \lambda_k$, където λ_j са литерали за $1 \leq j \leq k$, е композицията $f_{\text{dis}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$, където f_{dis} е обобщената дизюнкция на k променливи, а f_j е семантиката на λ_j , за $1 \leq j \leq k$.
- Семантиката на всяка КНФ $(\phi_1)(\phi_2) \dots (\phi_k)$, където ϕ_j е дизюнктивна клауза за $1 \leq j \leq k$, е $f_{\text{con}}(f_1, f_2, \dots, f_k)$, където f_{con} е обобщената конюнкция на k променливи, а f_j е семантиката на ϕ_j , за $1 \leq j \leq k$.

1.10 Разни

Функция (може дори да не е булева, но типовете на променливите трябва да са едни и същи) на n променливи, да я наречем $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ се нарича *симетрична*, ако стойността ѝ се запазва при всяка пермутация на променливите. С други думи,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$$

за всяка пермутация $\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ на вектора $1, 2, \dots, n$. Например, ако $n = 3$, то:

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3, x_2) = f(x_2, x_1, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = f(x_3, x_2, x_1)$$

Ако пък $n = 2$, то:

$$f(x_1, x_2) = f(x_2, x_1)$$

Очевидно комутативността е частен случай на симетричността.

2 Задачи

Задача 1. Намерете $|\mathcal{F}_2^n|$.

Решение: Добре известно е, че броят на тоталните функции с краен домейн X и краен кодомейн Y е $|Y|^{|X|}$. Прилагаме тази формула с $|X| = 2^n$ и $|Y| = 2$ и получаваме $|\mathcal{F}_2^n| = 2^{2^n}$. \square

Задача 2. Нека

$$S = \{f \in \mathcal{F}_2^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = \overline{f(\mathbf{z})}\}$$

Намерете $|S|$ (като функция на n , разбира се).

Решение: С други думи, търси се броят на булевите функции, които върху противоположни вектори имат противоположни стойности[†].

Да групираме n -векторите по двойки \mathbf{a}, \mathbf{b} , такива че $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{b}}$. За всяка функция $f \in X$ и за всяка от тези двойки е изпълнено следното. Стойността на функцията върху единия елемент от двойката се определя от стойността на функцията върху другия елемент от двойката. Иначе казано, стойностите, които функцията има върху *половината* от n -векторите, я определят напълно.

Но n -векторите са 2^n , така че половината от тях са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$ на брой. Имайки предвид това, виждаме, че броят на въпросните функции е равен на броя на всички булеви функции върху $n - 1$ променливи. Отговорът е $|S| = 2^{2^{n-1}}$. \square

Задача 3. Нека

$$X = \{f \in \mathcal{F}_2^n \mid \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in J_2^n : \mathbf{w} = \bar{\mathbf{z}} \rightarrow f(\mathbf{w}) = f(\mathbf{z})\}$$

Намерете $|X|$.

Решение: В тази задача се търси броят на функциите, които имат една и съща стойност върху противоположни вектори. Отговорът е $|X| = 2^{2^{n-1}}$ със практически същите съображения като в решението на Задача 2. \square

[†]Такива функции се наричат *самодвойствени* (на английски *self-dual*). Просто *двойствена* функция на $f \in \mathcal{F}_2^n$ е единствената $g \in \mathcal{F}_2^n$, за която е изпълнено $\forall \mathbf{a} \in J_2^n : g(\mathbf{a}) = \overline{f(\bar{\mathbf{a}})}$. Самодвойствените функции са тези, които са двойствени на себе си.

Задача 4. Намерете броя на булевите функции на n променливи, които имат стойност 1 върху точно k вектора.

Решение: Отговорът очевидно е $\binom{2^n}{k}$. □

Задача 5. Да се намери броят на симетричните булеви функции на n променливи.

Решение: Съгласно определението на симетрична функция, става дума за булеви функции, които запазват стойността си при произволно размятане на стойностите на елементите на входния вектор. Входният вектор се състои от нули и единици, следователно се иска върху всички входни вектори с **един и същи брой единици**, стойността на функцията да е една и съща. С други думи, иска се върху всеки слой на хиперкуба функцията да има една и съща стойност. Слоеве на n -мерния хиперкуб са $n + 1$, върху всеки от тях стойността е една и съща, а стойностите върху различни слоеве са произволни една спрямо друга. Тогава отговорът е 2^{n+1} . □

Задача 6. Кои са симетричните булеви функции на 2 променливи?

Решение: С други думи, кои са комутативните функции, тъй като при $n = 2$, свойството симетричност съвпада със свойството комутативност. Съгласно Задача 5, тези функции са $2^{2+1} = 8$ на брой. В каноничното представяне, това са функциите

$$f_0 = 0000$$

$$f_1 = 0001$$

$$f_6 = 0110$$

$$f_7 = 0111$$

$$f_8 = 1000$$

$$f_9 = 1001$$

$$f_{14} = 1110$$

$$f_{15} = 1111$$

□

Задача 7. Да се определи броят на булевите функции на n променливи за $n \geq 2$, които запазват стойността си при размяна на променливите x_1 и x_2 .

Решение: С други думи, иска се

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n)$$

за всички възможни стойности на x_1, \dots, x_n . Решението ще получим след като съобразим колко различни входни вектори има по отношение на тази задача.

Лесно се вижда, че ако $x_1 = x_2 = 0$ или $x_1 = x_2 = 1$, разместването на x_1 и x_2 няма значение и функцията запазва стойността си по очевидни причини при разместването на x_1 и x_2 . Да разбием множеството от всички входни вектори на 4 равномошни подмножества

съгласно четирите възможности за подвектора x_1x_2 :

$$\begin{aligned} A &= 0 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ B &= 0 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ C &= 1 \times 0 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \\ D &= 1 \times 1 \times \underbrace{J_2 \times \cdots \times J_2}_{n-2 \text{ пъти}} \end{aligned}$$

Всяко от тези множества има мощност 2^{n-2} . Да разгледаме булевите функции на n променливи без ограничения. Всяка булева функция на n променливи без ограничения има 2^{n-2} стойности върху векторите от A , върху векторите от B , върху векторите от C и върху векторите от D . Всички тези стойности на функцията, на брой $4 \times 2^{n-2} = 2^n$ може да са единици или нули независимо една от друга, откъдето и броят на всички функции е 2^{2^n} .

Ако имаме предвид ограничението от условието на задачата, виждаме, че върху всеки вектор от C , стойността на функцията трябва да съвпада със стойността ѝ върху точно един вектор от B . От друга страна, върху векторите от A стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества. Аналогично, върху векторите от D стойностите на функцията са произволни – без значение какви стойности има върху останалите три множества.

За да получим броя на търсените функции, достатъчно е да игнорираме едно от множествата B и C , да кажем, че игнорираме C , и да разглеждаме само A , B и D . За всеки вектор $\mathbf{z} \in A \cup B \cup D$, стойността на функцията е независима от стойността ѝ върху кой да е друг вектор $\mathbf{z}' \in A \cup B \cup D$. Тогава отговорът е

$$2^{2^{|A|+|B|+|D|}} = 2^{3 \times 2^{n-2}}$$

Ако заместим $n = 2$, получаваме 2^3 , което точно съвпада с отговора на Задача 6. \square

Задача 8. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни входни вектори.

Решение: Отговорът очевидно е $2^{2^n} - |A|$, където A е множеството от булевите функции на n променливи, които не приемат стойност 1 върху никои два противоположни вектора. С други думи, за всеки входен вектор \mathbf{a} и за всяка функция $f \in A$ е изпълнено:

$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 0) \vee \quad (4)$$

$$(f(\mathbf{a}) = 0 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 1) \vee \quad (5)$$

$$(f(\mathbf{a}) = 1 \wedge f(\bar{\mathbf{a}}) = 0) \quad (6)$$

Двойките противоположни вектори на брой са $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. За всяка такава двойка покажем, че възможностите са точно 3 (за да може функцията да бъде от A). И така, $|A| = 3^{2^{n-1}}$. Отговорът тогава е

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} \quad (7)$$

Тук може да възникне следното питане. Щом $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$ е мощността на непразно множество, то очевидно това е положително число за всяко n . Ако обаче не знаем комбинаторните съображения, довели до отговора, а просто видим $2^{2^n} - 3^{2^{n-1}}$, може да се запитаме, това не може ли да е отрицателно за някакви n . С помощта на математическия анализ можем да докажем, че не може да е отрицателно при неограничено нарастване на n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{3^{2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2^n}}{2^{(\log_2 3)2^{n-1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2^n - (\log_2 3)2^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2 - \log_2 3)2^{n-1}} = \infty$$

понеже $2 > \log_2 3$.

Следното доказателство на същото твърдение е на Добромир Кралчев:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = 2^{2 \times 2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}} - 3^{2^{n-1}} > 0$$

Тази задача може да се реши и с други съображения. Нека B е подмножеството на \mathcal{F}_2^n от функциите, които приемат стойност 1 върху поне една двойка противоположни вектори. Ние търсим $|B|$. Нека B_k за $1 \leq k \leq 2^{n-1}$ е подмножеството от тези функции, които приемат стойност 1 върху точно k двойки противоположни вектори. Очевидно B се разбива на $B_1, \dots, B_{2^{n-1}}$, така че

$$|B| = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} |B_k|$$

Лесно се вижда, че

$$|B_k| = \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

Съображенията са следните: по $\binom{2^{n-1}}{k}$ начина можем да изберем от всички 2^{n-1} двойки противоположни вектори такива, върху които функцията да има стойност 1 , а за всяка от останалите $2^{n-1} - k$ двойки вектори имаме точно 3 възможности (виж (4)), така щото функцията да няма стойност 1 върху двата елемента на двойката. И така, отговорът е:

$$\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)} \tag{8}$$

От (7) и (8) извеждаме (с комбинаторни разсъждения) тъждеството:

$$2^{2^n} - 3^{2^{n-1}} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \binom{2^{n-1}}{k} 3^{(2^{n-1}-k)}$$

□

Задача 9. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1 , то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има поне толкова единици, колкото \mathbf{a} ?

Решение: С други думи, ако f има стойност 1 върху някакъв вектор \mathbf{a} , то f има стойност 1 върху всички вектори от слой на хиперкуба, към който слой принадлежи \mathbf{a} , и освен това f има стойност 1 върху всички вектори от всички следващи слоеве. Веднага се вижда, че всяка такава функция има една и съща стойност върху всеки слой на хиперкуба и се определя еднозначно от това, къде е “границата” между нулите и единиците върху хиперкуба;. По-подробно казано, върху някакви последователни слоеве на хиперкуба (може и да няма такива), започвайки от слой 0, функцията има стойност само 0, и после върху всички останали слоеве (може и да няма такива), функцията има стойност само 1. Тъй като слоевете са $n + 1$, то има точно $n + 2$ такива функции. \square

Задача 10. За колко булеви функции f на n променливи е изпълнено следното: ако $f(\mathbf{a})$ има стойност 1, то f има стойност 1 върху всеки вектор, който има повече единици от \mathbf{a} ?

Решение: Задачата е подобна на Задача 9, но само донякъде. В Задача 10:

- или има някакъв “граничен слой” в хиперкуба, нека да е слой k , в който за първи път се появява стойност на функцията 1, като върху всички слоеве с по-малък номер функцията е задължително 0, а върху всички слоеве с по-голям номер функцията е задължително 1,
- или такъв граничен слой няма, тоест изобщо няма единици, тоест функцията е константа-нула[†].

Първо да сметнем колко са функциите от търсения вид, които имат поне една единица (с други думи, не са константа-нула). Числото k (номерът на граничния слой) може да е най-малко 0 и най-много n . Тъй като в слоеве с номера 0, \dots , $k - 1$ и $k + 1$, \dots , n нещата са фиксирани, единственото, което варира, е как точно са “раздадени” нулите и единиците в слой k по такъв начин, че да има поне една единица.

Знаем, че слой k има мощност $\binom{n}{k}$. Всички начини да “раздадем” нули и единици на неговите елементи са $2^{\binom{n}{k}}$ на брой. От това число вадим единица, за да отразим факта, че върху поне един вектор от слой k функцията е единица (с други думи, изваждаме от разглеждането раздаването само на нули). И така, за дадено k , броят на начините функцията да има поне една единица върху векторите на слой k е $2^{\binom{n}{k}} - 1$. А отговорът, съгласно принципа на разбиването, е:

$$\sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}} - 1\right) = \sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n - 1 \quad (9)$$

Към (9) добавяме единица, защото функцията може да е константа-нула, и получаваме

$$\sum_{k=0}^n \left(2^{\binom{n}{k}}\right) - n$$

\square

Задача 11. Да се намери броят на булевите функции на n променливи, които нямат фиктивни променливи.

[†]Благодарности на Добромир Кралчев за посочването на това!

Решение: Очевидно отговорът е $= 2^{2^n} - |A|$, където A е множеството от булевите функции, които имат поне една фиктивна променлива.

Да разгледаме без ограничение на общността променливата x_1 . В колко функции тя е фиктивна? Може да има и други фиктивни променливи, може и да няма – пита се, за колко функции е изпълнено x_1 да е фиктивна? От дефиницията на фиктивна променлива имаме изискването за всяка от тези функции, да кажем f , да е изпълнено:

$$f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Ако си представим входните вектори, наредени лексикографски отгоре надолу, иска се функцията (която е колона с височина 2^n) да е такава, че горната половина на колоната да е точно като долната половина. Ето малък пример за функция, в която x_1 е фиктивна:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Виждаме, че за да бъде x_1 фиктивна, стойността на функцията върху половината вектори определя стойността ѝ върху другата половина. Броят на функциите, в които x_1 е фиктивна, е $2^{2^{n-1}}$.

Всяка променлива на функцията може да е фиктивна. Но отговорът на въпроса, колко са функциите с поне една фиктивна променлива, **не е** $n \times 2^{2^{n-1}}$, тъй като този израз брои някои функции по няколко пъти. Може да има повече от една фиктивна променлива. Ето пример за функция, в която x_1 , и x_2 са фиктивни:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

От $n \times 2^{2^{n-1}}$ ще изваждаме по принципа на включването и изключването: ще намерим колко са функциите, в които поне две променливи са фиктивни, в колко поне три са фиктивни, и така нататък, в колко поне n са фиктивни, и ще построим израз с алтерниращи положителни и отрицателни знаци съгласно принципа на включването и изключването.

Броят на функциите с поне две фиктивни променливи е $\binom{n}{2} \times 2^{2^{n-2}}$, защото по $\binom{n}{2}$ начина избираме кои да са променливите и след това забелязваме, че една четвърт от входните вектори определят функцията напълно в смисъл, че върху останалите стойностите ѝ повтарят тези от четвъртинката. Аналогично, броят на функциите с поне три фиктивни променливи е $\binom{n}{3} \times 2^{2^{n-3}}$.

И така, броят на функциите с поне една фиктивна променлива е:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

Тогава броят на функциите без фиктивни променливи е:

$$2^{2^n} - \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} 2^{2^{n-k}}$$

□

Задача 12. Дадени са булевите функции $f = 1011$ и $g = 1001$. Да се намери каноничното представяне на функцията $h(x_2, x_4, x_3) = f(g(x_4, x_3), x_2)$.

Решение: Имената на променливите са дадени по този начин за объркване. С просто преименуване получаваме еквивалентен израз $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Каквито и имена на променливи да ползваме, става дума за 3 променливи и таблицата на търсената функция трябва да има 8 реда:

| x_1 | x_2 | x_3 | $h(x_1, x_2, x_3)$ |
|-------|-------|-------|--------------------|
| 0 | 0 | 0 | ? |
| 0 | 0 | 1 | ? |
| 0 | 1 | 0 | ? |
| 0 | 1 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 | ? |
| 1 | 0 | 1 | ? |
| 1 | 1 | 0 | ? |
| 1 | 1 | 1 | ? |

Това, че f и g са дадени без имена на променливите няма никакво значение. Очевидно $f(00) = 1$, $g(00) = 1$, $f(01) = 0$ и така нататък. Функцията h е дефинирана като $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_2, x_3), x_1)$. Заместваме в таблицата:

| x_1 | x_2 | x_3 | $f(g(x_2, x_3), x_1)$ |
|-------|-------|-------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | ? |
| 0 | 0 | 1 | ? |
| 0 | 1 | 0 | ? |
| 0 | 1 | 1 | ? |
| 1 | 0 | 0 | ? |
| 1 | 0 | 1 | ? |
| 1 | 1 | 0 | ? |
| 1 | 1 | 1 | ? |

Ще пресмятаме отвътре навън, тъй като тази функция е композиция на $g(x_2, x_3)$ на мястото на първата променлива на f . И така, да видим какви са стойностите на $g(x_2, x_3)$ в таблицата. Те са еднозначно определени, защото на всеки ред x_2 и x_3 си имат някакви стойности, а от каноничната дефиниция на g знаем какви са функционалните ѝ стойности върху всеки вход.

| x_1 | x_2 | x_3 | $g(x_2, x_3)$ |
|-------|-------|-------|---------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Тук никъде не ползвахме най-лявата колона, защото g не зависеше от x_1 . В следващата стъпка от решението пък няма да ползваме колоните на x_2 и x_3 , защото f зависи непосредствено само от стойностите на g и от x_1 :

| x_1 | x_2 | x_3 | $g(x_2, x_3)$ | $f(g(x_2, x_3), x_1)$ |
|-------|-------|-------|---------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

За да се убедим, че е така, да си припомним дефиницията $f = 1011$. Функцията f е нула тогава и само тогава, когато входът е 01 . На горните четири реда $x_1 = 0$, а в израза $f(g(x_2, x_3), x_1)$, x_1 е втората променлива, така че на горните четири реда функцията е четири единици. На долните четири реда, $x_1 = 1$, така че функцията просто повтаря стойностите на $g(x_2, x_3)$. □

Задача 13. Нека $f = 1000$ и $g = 0001$. Да се намери каноничната форма на функцията $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$

Решение:

| x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | $f(x_1, x_2)$ | $g(x_3, x_4)$ | $f(x_1, x_2) \wedge g(x_3, x_4)$ |
|-------|-------|-------|-------|---------------|---------------|----------------------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

И така, $h = 0111\ 0000\ 0000\ 0000$. □

Задача 14. Дадени са следните функции чрез формули:

$$f(x, y, z) = xy \oplus xz \oplus yz$$

$$g(x, y, z) = (x \rightarrow y) \oplus ((y \rightarrow z) \oplus (z \rightarrow y))$$

$$h(x, y, z) = (x \rightarrow y)(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$$

Да се намерят каноничните представяния на функциите.

Отговор:

$$f(x, y, z) = 00010111$$

$$g(x, y, z) = 10010101$$

$$h(x, y, z) = 11111111$$

□

Задача 15. Еквивалентни ли са следните две формули:

$$((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$$

$$x|y$$

Решение: Да, еквивалентни са. Ще решим задачата с табличния метод (таблиците не са показани). Първата формула е конюнкция от $\bar{1} = ((x \oplus y) \rightarrow (x \vee y))$ и $1110 = ((\bar{x} \rightarrow y) \rightarrow (x \oplus y))$, която е очевидно 1110. А долната формула—чертата на Sheffer—е на функцията 1110 по дефиниция. □

Задача 16. Докажете чрез еквивалентни преобразувания следните еквивалентности:

- $x \rightarrow (xy \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow y)z) = y \rightarrow (x \rightarrow z)$.
- $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)$.
- $\bar{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee ((y \rightarrow z)(z \rightarrow y))}$.

Разрешените еквивалентни преобразувания са всички свойства на булевите функции на две променливи, дадени в учебника, и освен това свойството на импликацията $x \rightarrow y = \bar{x} \vee y$ и свойството на сумата по модул две $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, свойството на еквивалентността $x \equiv y = xy \vee \bar{x}\bar{y}$, свойството на чертата на Sheffer $x|y = \bar{x}\bar{y}$ и свойството на стрелката на Peirce $x \downarrow y = x \vee y$.

Решение: Ще покажем само последната еквивалентност, която е

$$\bar{x}(y \oplus z) = \overline{x \vee \underbrace{((y \rightarrow z)(z \rightarrow y))}_A}$$

Да разгледаме израза $A = (y \rightarrow z)(z \rightarrow y)$. В сила е:

$$\begin{aligned} A &= (y \rightarrow z)(z \rightarrow y) \quad // \text{ свойство на импликацията} \\ &= (\bar{y} \vee z)(\bar{z} \vee y) \quad // \text{ дистрибутивност на конюнкцията над дизюнкцията} \\ &= \bar{y}\bar{z} \vee \underbrace{\bar{y}y}_0 \vee \underbrace{z\bar{z}}_0 \vee zy \\ &= yz \vee \bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

И така, дясната страна е еквивалентна на

$$\begin{aligned}\overline{x \vee yz \vee \bar{y} \bar{z}} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \bar{x} \bar{y} \bar{z} \bar{y} \bar{z} &= \quad // \text{ De Morgan} \\ \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{y} \vee \bar{z}) &= \bar{x}(\bar{y} \vee \bar{z})(y \vee z) = \bar{x}(\bar{y}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}y \vee \bar{z}z) = \\ \bar{x}(\bar{y}z \vee \bar{z}y) &= \bar{x}(y \oplus z)\end{aligned}$$

□

Задача 17. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че x_1 е фиктивна променлива в следните функции:

- $f(x_1, x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2)$.
- $g(x_1, x_2) = (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1 | x_2)$.
- $h(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3)(\bar{x}_3 \rightarrow x_2)$.

Решение:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= (x_2 \rightarrow x_1)(x_2 \downarrow x_2) = (x_2 \rightarrow x_1)(\overline{x_2 \vee x_2}) = (x_2 \rightarrow x_1)\bar{x}_2 = \\ &(\bar{x}_2 \vee x_1)\bar{x}_2 = \bar{x}_2 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 = \bar{x}_2(1 \vee x_1) = \bar{x}_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(x_1, x_2) &= (x_2 \equiv x_1) \vee (x_1 | x_2) = (x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 x_2) = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 = \\ &x_1 x_2 \vee \bar{x}_1(\bar{x}_2 \vee 1) \vee \bar{x}_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 1 \vee \bar{x}_2 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 = \\ &x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \quad // \text{ нека } x_1 x_2 = p \\ &p \vee \bar{p} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_3)(x_3 \rightarrow x_2) = (\overline{x_1 \oplus x_2 \vee x_3})(\bar{x}_3 \vee x_2) = \\ &(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_3 \bar{x}_2) = (\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2 \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2 \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = \\ &((\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2) \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = ((\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = \\ &((\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = ((\bar{x}_1 x_1 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_1 \vee x_2 \bar{x}_2) \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = \\ &((\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_1) \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_2 x_1 \vee x_3)\bar{x}_2 x_3 = \\ &\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_2 x_3 \vee x_2 x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_3 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee 0 \vee \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_2 x_3 = \\ &(\bar{x}_1 \vee 1)\bar{x}_2 x_3 = 1 \bar{x}_2 x_3 = \bar{x}_2 x_3\end{aligned}$$

□

Задача 18. Докажете, че всяка симетрична булева функция, различна от константа, има само съществени променливи.

Решение: Да наречем тази функция f . Нека n е броят на нейните променливи. Щом f не е константа, f има стойност 0 върху поне един вектор и стойност 1 върху поне един вектор. Съгласно разсъжденията в решението на Задача 5, за всеки слой на n -мерния хиперкуб, f има една и съща стойност върху всички вектори от този слой. Лесно се вижда, че в хиперкуба има съседни слоеве (тоест, единият има една единица повече от другия), такива че f има стойност 0 върху единия от тях и стойност 1 върху другия от тях.

Без ограничение на общността, нека f има стойност 0 върху всички вектори от слой k и стойност 1 върху всички вектори от слой $k + 1$, за някое k , такава че $0 \leq k \leq n - 1$. Ще докажем едно помощно твърдение, чиято важност налага да го обособим като лема. Използваме контрапозитивното твърдение[†] на Лема 1 и търсеният резултат следва веднага.

Лема 1. Ако $f \in \mathcal{F}_2^n$ има поне една фиктивна променлива, то за всеки два съседни слоя L_k и L_{k+1} на n -мерния хиперкуб съществува вектор $\mathbf{a} \in L_k$ и съществува вектор $\mathbf{b} \in L_{k+1}$, такива че $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$.

Доказателство: Нека x_i е фиктивната променлива. По дефиниция:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n)$$

за всяко “раздаване” на (булеви) стойности на $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$.

Да разгледаме произволно k , такава че $0 \leq k \leq n - 1$. Очевидно съществува поне едно “раздаване”[‡] на стойности на $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$, което “дава” точно k единици на променливите $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$. Да разгледаме кое да е раздаване, даващо k единици, и да го наречем ϕ . По отношение на ϕ , векторът

$$\mathbf{a} = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$$

има точно k единици, а векторът

$$\mathbf{b} = x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$$

има точно $k + 1$ единици[§]. Но \mathbf{a} е вектор от слой k и \mathbf{b} е вектор от слой $k + 1$ на хиперкуба. **QED**

□

Следващата задача ползва релацията \preceq , дефинирана в (2).

Задача 19. Да разгледаме някаква $f \in \mathcal{F}_2^n$, такава че съществуват k вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ за някакво $k \geq 2$, такива че

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &\preceq \mathbf{a}_2 \preceq \dots \preceq \mathbf{a}_k \\ f(\mathbf{a}_1) &\neq f(\mathbf{a}_2) \neq \dots \neq f(\mathbf{a}_k) \end{aligned}$$

Да се докаже, че функцията има поне $k - 1$ съществени променливи.

Решение: Релацията \preceq е рефлексивна, но от второто ограничение следва, че векторите са два по два различни. Да си припомним и релацията \prec , дефинирана в (3). Очевидно, по отношение на \preceq има верига

$$\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{b}_{1,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{1,t_1} \prec \mathbf{a}_2 \prec \mathbf{b}_{2,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{2,t_2} \prec \dots \prec \mathbf{a}_{k-1} \prec \mathbf{b}_{k-1,1} \prec \dots \prec \mathbf{b}_{k-1,t_{k-1}} \prec \mathbf{a}_k$$

[†]Контрапозитивното е “Ако съществуват съседни слоеве L_k и L_{k+1} на хиперкуба, такива че $\forall \mathbf{a} \in L_k \forall \mathbf{b} \in L_{k+1} : f(\mathbf{a}) \neq f(\mathbf{b})$, то f няма фиктивни променливи”.

[‡]По-точно казано, има точно $\binom{n-1}{k}$ такива “раздавания”.

[§]Забележете, че след като изберем такава ϕ и разглеждаме нещата по отношение на него, символите x_1 и така нататък вече не са променливи, а са конкретни булеви стойности.

Твърдим, че в тази верига има поне $k-1$ различни съседни двойки вектори[†], такива че функцията има противоположни стойности върху векторите от всяка двойка. Това твърдение е очевидно и няма да го доказваме. Векторите от всяка двойка се различават в точно една позиция, следователно са вектори от два съседни слоя на хиперкуба. Прилагаме контрапозитивното твърдение на Лема 1 и виждаме, че функцията има $k-1$ фиктивни променливи.

Факта, че всяка двойка двойки задава **различни** фиктивни променливи, поради което заключаваме, че променливите не може да са по-малко от $k-1$, е очевиден. \square

Задача 20. Нека $f, g \in \mathbf{F}_2^n$ са такива, че $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори $\mathbf{a} \in \mathbf{J}_2^n$. Да се докаже, че всяка променлива е съществена за поне едната от функциите f и g .

Решение: Ограничението “ $f(\mathbf{a}) \oplus g(\mathbf{a}) = 1$ за точно нечетен брой вектори” е същото като “ f и g се различават върху точно нечетен брой вектори” – това следва тривиално от дефиницията на функцията \oplus .

И така, двете функции имат противоположни стойности върху подмножество на \mathbf{J}_2^n с нечетна мощност. Да допуснем, че съществува променлива x_i , която е фиктивна и за двете функции. По дефиниция:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) &= g(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

за всяко раздаване на 0 и 1 на променливите $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$.

Да си представим и двете функции едновременно върху хиперкуба – да си представим n -мерния хиперкуб и до всеки негов връх, стойността на функцията f в червено и стойността на функцията g в синьо.

Да срежем хиперкуба в i -тата размерност. Получаваме два хиперкуба, всеки от размерност $n-1$. За произволен връх \mathbf{u} от единия получен $(n-1)$ -мерен хиперкуб, ако \mathbf{v} е неговият съответен връх[‡] в другия $(n-1)$ -мерен хиперкуб, ясно е, че $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$ и $g(\mathbf{u}) = g(\mathbf{v})$ – това е заради фиктивността на x_i по отношение и на f , и на g .

Следователно, броят на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в единия $(n-1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **една и съща стойност** в другия $(n-1)$ -мерен хиперкуб. А оттук следва, че броят на върховете, върху които f и g имат **различна стойност** в единия $(n-1)$ -мерен хиперкуб е равен на броя на върховете, върху които f и g имат **различна стойност** в другия $(n-1)$ -мерен хиперкуб. Но броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n -мерен хиперкуб, е равен на сумата от броя на върховете, върху f и g се различават върху единия получен $(n-1)$ -мерен хиперкуб и броя на върховете, върху f и g се различават върху другия получен $(n-1)$ -мерен хиперкуб. Щом двете събираеми са равни, тяхната сума е четно число. Тогава броят на върховете, върху които f и g се различават в оригиналния (преди срязването) n -мерен хиперкуб, е четна. Коего противоречи на условието на задачата. \square

Задача 21. Докажете чрез еквивалентни преобразувания, че следните две формули не са еквивалентни:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (x \downarrow \bar{y}) \rightarrow (\bar{x}\bar{z} \rightarrow ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}\bar{y} \vee z))) \\ \mathbf{V} &= ((x \rightarrow y)|(x \downarrow (y\bar{z})) \vee \bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

Разрешените еквивалентни преобразувания са тези от Задача 16.

[†] Две такива двойки може да имат общ елемент, въпреки че са различни като двойки.

[‡] “Съответен връх” означава, че има същия етикет, тоест $(n-1)$ -мерен булев вектор.

Решение: От една страна:

$$\begin{aligned}
 U &= \overline{x \downarrow \bar{y}} \vee (\overline{x \bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}y \vee z))) \\
 &= \overline{x \vee \bar{y}} \vee \overline{x \bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee (\bar{x}y \vee z)) \\
 &= x \vee \bar{y} \vee \overline{x \bar{z}} \vee ((\bar{x}|(y \equiv z)) \vee \bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = // \text{ понеже е от вида } x \vee \dots \bar{x} \vee \dots \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

От друга страна:

$$\begin{aligned}
 V &= \overline{(\bar{x} \vee y)(\overline{x \vee yz})} \vee \bar{y} \bar{z} \\
 &= (\overline{\bar{x} \vee y}) \vee (\overline{x \vee yz}) \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\
 &= \bar{\bar{x}} \bar{y} \vee x \vee y \bar{z} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \\
 &= x \bar{y} \vee 1 \bar{x} \vee y \bar{z} \vee 1 \bar{z} \vee \bar{y} \\
 &= x(\bar{y} \vee 1) \vee \bar{z}(y \vee 1) \vee \bar{y} = x \vee \bar{y} \vee \bar{z}
 \end{aligned}$$

Покажахме, че V е еквивалентна на $x \vee \bar{y} \vee \bar{z}$. От тази проста формула лесно се вижда, че семантиката на V не е константа-единица. Следователно, U и V не са еквивалентни. \square

Задача 22. Намерете СъвДНФ на булевата функция $f = 01110100$.

Решение: Имената на променливите не са уточнени, така че имаме свобода да си ги изберем. Избираме x , y и z , като се ползва традиционната наредба x -преди- y и y -преди- z . Тогава таблицата на функцията е:

| x_1 | x_2 | x_3 | f |
|-------|-------|-------|-----|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

СъвДНФ е:

$$\bar{x} \bar{y} z \vee \bar{x} y \bar{z} \vee \bar{x} y z \vee x \bar{y} z$$

\square

Задача 23. Намерете СъвДНФ на следните булеви функции:

А) $(x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2 x_3$

Б) $f = 01101100$

В) $g = 0001\ 1101\ 1001\ 1011$

Г) $\overline{x_1 \bar{x}_2} \rightarrow \bar{x}_3$

Д) $(x|y)\bar{z}$

$$\text{Е) } xy \equiv (y \equiv z)$$

Ако променливите не са именувани явно, допуснете подходящо именуване с, например, x , y , z или x_1 , x_2 , x_3 и така нататък.

Отговори и решения:

$$\text{А) } (x_1 \oplus x_2) \rightarrow x_2 x_3 = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \vee x_1 x_2 x_3$$

$$\text{Б) } f(x, y, z) = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} y \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} z$$

$$\text{В) } g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}$$

Г) $\overline{\overline{x_1} \overline{x_2} \rightarrow \overline{x_3}} = \overline{\overline{\overline{x_1} \overline{x_2}} \vee \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}} = \overline{\overline{x_1}} \vee \overline{\overline{x_2}} \vee \overline{\overline{x_3}} = x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$. В този случай намерихме СъвДНФ с еквивалентни преобразувания. По-точно казано, извършихме редица от еквивалентни преобразувания, резултатът от които е израз, който е СъвДНФ по **формални** причини: има точно такава форма, каквато трябва да има една СъвДНФ.

Д) $(x|y)\overline{z} = \overline{x} \overline{y} \overline{z}$. За съжаление, полученият израз **не е** СъвДНФ, защото няма желаната форма! За да е СъвДНФ с една пълна конюнктивна клауза, изразът трябва да е конкатенация от литерали, а този израз не е такъв, защото $\overline{x} \overline{y}$ нито е литерал, нито е конкатенация от литерали. Ако искаме да решим подзадачата с еквивалентни преобразувания, трябва да продължим. $\overline{x} \overline{y} \overline{z} = (\overline{x} \vee \overline{y}) \overline{z} = \overline{x} \overline{z} \vee \overline{y} \overline{z} = \overline{x} \overline{z} (y \vee \overline{y}) \vee \overline{y} \overline{z} (x \vee \overline{x}) = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z}$

$$\text{Е) } \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} \overline{z} \vee x y z \vee \overline{x} \overline{y} z$$

□

Задача 24. Колко СъвДНФ има над n променливи?

Решение: Броят на пълните конюнктивни клаузи е точно 2^n , защото във всяка от тях участват точно n литерала, а за всеки от тях има точно 2 възможности независимо от останалите. Всяка СъвДНФ се определя еднозначно от това, кои пълни конюнктивни клаузи участват. Но отговорът 2^{2^n} за броя на всички СъвДНФ не е точен, понеже не може да няма нито една пълна конюнктивна клауза. С други думи, празната формула (празният стринг) не е СъвДНФ по дефиниция. Отговорът е $2^{2^n} - 1$.

Можем да го получим и с други разсъждения: всяка булева функция на n променливи без константа-нула има точно една СъвДНФ, а на различни СъвДНФ съответстват различни булеви функции. □

Задача 25. Колко ДНФ има над n променливи?

Решение: Трябва да съобразим колко конюнктивни клаузи има. В конюнктивните клаузи има три възможности за всяка променлива (а не две, както беше при пълните конюнктивни клаузи) – променливата може да участва като положителен литерал, като отрицателен литерал или изобщо да не участва. Това означава 3^n възможности, но ако броим и възможността да няма участващи променливи изобщо, тоест празната последователност от литерали (празният стринг). Но ние искаме всяка пълна конюнктивна клауза да е непразна, тоест да има поне един литерал, така че възможността да няма нито един литерал отпада и възможностите са $3^n - 1$.

Всяка от пълните конюнктивни клаузи може да участва или да не участва, но трябва да има поне една такава, така че общо възможностите са $2^{3^n - 1} - 1$. □

Задача 26. Намерете броя на булевите функции от \mathcal{F}_2^n , чиито СъвДНФ изпълняват условието:

1. Няма пълна конюнктивна клауза, в която броят на положителните литерали е равен на броя на отрицателните литерали.
2. Всяка пълна конюнктивна клауза има четен брой отрицателни литерали.
3. Всяка пълна конюнктивна клауза има поне два отрицателни литерала.

Решение:

1. Ако n е нечетно, то всички СъвДНФ са такива и отговорът е $2^{2^n} - 1$. Ако n е четно, отговорът е $2^p - 1$, където p е броят на n -векторите с неравен брой нули и единици. Очевидно, $p = 2^n - q$, където q е броят на n -векторите с равен брой нули и единици. Но ние знаем, че има точно $\binom{n}{n/2}$ начина да разположим $n/2$ нули и $n/2$ единици в линейна наредба, следователно $q = \binom{n}{n/2}$, следователно $p = 2^n - \binom{n}{n/2}$, следователно отговорът е $2^{2^n - \binom{n}{n/2}} - 1$.
2. За всеки входен вектор съответната пълна конюнктивна клауза участва в СъвДНФ тук функцията има стойност 1 върху този входен вектор. Искане се функцията да е задължително 0 върху всички входни вектори с нечетен брой нули, тоест стойността на функцията може да варира само върху векторите с четен брой нули. Отговорът е $2^{2^{n-1}} - 1$, защото точно половината† вектори, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$, са тези с четен брой нули, а от $2^{2^{n-1}}$ вадим единица заради това, че функцията константа-нула няма СъвДНФ.
3. Върху векторите с нула нули и точно една нула, функцията трябва да е задължително 0. Освен това, не може да е константа-нула. Други ограничения няма. Има един вектор с нула нули и n вектора с точно една нула. Отговорът е $2^{2^n - n - 1} - 1$.

□

Задача 27. Нека $n \geq 2$. Да се определи дължината на СъвДНФ (като брой на пълните конюнктивни клаузи) на следните булеви функции, представени чрез формули:

1. $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$
2. $(x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \dots \vee \bar{x}_n)$
3. $\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$
4. $\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j)$

Решение: Задачата е същата като “колко единици съдържа каноничното представяне на функцията?”. Каноничното представяне на всяка от тези четири функции има лесна за определяне форма. Трябва разберем какъв е pattern-ът на каноничното представяне на всяка от тях. Сторим ли това, решението става тривиално.

†Това се извежда тривиално, имайки предвид резултата от комбинаториката, че броят на подмножествата с четна мощност е равен на броя на подмножествата с нечетна мощност.

1. Функцията е сума по модул две на всички променливи. Очевидно, тази сума е 1 точно върху тези вектори, които имат нечетен брой единици. Както вече казахме в решението на Задача 26, векторите с нечетен брой единици са точно половината, тоест $\frac{1}{2}2^n = 2^{n-1}$. Отговорът е точно 2^{n-1} . Забележете, че **не** е $2^{2^{n-1}}$, защото върху въпросните вектори стойностите на функцията не варират, а само единици.
2. Лесно се вижда, че функцията е 0 върху точно два вектора: $00 \cdots 0$ и $11 \cdots 1$. Отговорът е $2^n - 2$.
3. Функцията има стойност 1 точно върху тези вектори, които имат поне две единици в себе си. Векторите, които нямат поне две единици в себе си, са тези с нула единици (само един) и с точно една единица (n такива). Отговорът е $2^n - n - 1$.
4. Може би е по-лесно да се съобрази каква е формата на каноничното представяне, ако използваме различно представяне на същата функция:

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (x_i \rightarrow x_j) = \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} (\bar{x}_i \vee x_j)$$

Която и от двете формули да разгледаме, виждаме, че функцията е нула върху точно тези вектори, които имат поне една 1, която е вляво от поне една 0^\dagger . Следователно, функцията е единица точно върху векторите $00 \cdots 00$, $00 \cdots 01$, $00 \cdots 11$, ..., $01 \cdots 11$, $11 \cdots 11$. Те са точно $n + 1$, и това е отговорът. \square

Задача 28. Нека $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$ са булеви функции, такива че СъвДНФ на f има k_1 пълни конюнктивни клаузи, а на g , k_2 пълни конюнктивни клаузи. Да се определи дължината, в брой пълни конюнктивни клаузи, на:

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= fg \\ t(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) &= f \vee g \end{aligned}$$

Решение: Да разгледаме първо fg . Забележете, че това е функция **не** на n , а на $2n$ променливи. Нейната таблица е показана схематично на следната таблица. Да си представим, че върху входните вектори, всеки с дължина $2n$, които са общо 2^{2n} на брой, е дефинирано групиране в нещо като правоъгълници с размери $n \times 2^n$, които на таблицата са показани в лявата страна, оцветени в розово и зелено. Всеки зелен правоъгълник огражда една група от стойности на y -променливите, като групите са 2^n общо и съдържанието им е едно и също: всяка група съдържа точно всички n -вектори в лексикографски ред. Розовите правоъгълници ограждат групи от стойности на x -променливите, като тези групи пак са 2^n общо и всяка има 2^n n -вектора, но сега всяка група съдържа 2^n копия на един и същи n -вектор.

Тъй като функцията g зависи от y -стойностите, а функцията f , от x -стойностите, в дясната страна, където са функционалните стойности, наблюдаваме следните закономерности. Колоната на g се състои от 2^n подколони, всяка от които е копие на един и същи pattern, който има точно k_2 единици (по условие g има СъвДНФ с точно k_2 пълни конюнктивни клаузи). Точно какво е съдържанието на тази повтаряща се колона зависи от конкретиката на g . В таблицата " \tilde{g}_i " е кратък запис за $g(\tilde{y}_i)$, където \tilde{y}_i е i -ият вектор от y -векторите, за $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

От друга страна, колоната на f се състои от 2^n подколони, всяка от които съдържа 2^n копия на една и съща стойност, а именно функционалната стойност на f върху i -ия от x -векторите за $0 \leq i \leq 2^n - 1$, която е отбелязана с \tilde{f}_i . Очевидно точно k_1 от тези подколони са от единици. Кои точно, зависи от конкретиката на f .

\dagger Тоест, в които има $x_i = 1$ и $x_j = 0$ при $i < j$; тоест, които са от вида $\cdots 1 \cdots 0 \cdots$.

И така, функцията h е конюнкция от f и g . Колоната на h не е изобразена, но лесно може да си я представим написана най-вдясно, с височина 2^{2^n} , състояща от поелементни конюнкции от колоните на g и f . Тривиално е да се съобрази, че ако разбием колоната на h на 2^n подколони аналогично на разбиванията на колоните на g и f , точно $2^n - k_1$ от подколониите ще са само от нули, защото колоната на f има точно $2^n - k_1$ от подколони от нули, които в поелементните конюнкции “нулират” стойността на h върху дадения 2^n -вектор независимо от стойностите на g върху него. А останалите k_1 на брой подколони на f са само от единици. За всяка от тях, функцията h получава точно k_2 единици заради поелементната конюнкция.

Общо, h има точно $k_1 \times k_2$ единици.

Сега да разгледаме функцията t . Съображенията са аналогични и таблицата е същата, но сега търсим мощността не на сечение, а на обединение. Колоната на g има общо $k_2 \times 2^n$ единици, а колоната на f има общо $k_1 \times 2^n$ единици. От $k_1 2^n + k_2 2^n = (k_1 + k_2) 2^n$ трябва да извадим, съгласно принципа на включването и изключването, мощността на сечението, която, както вече установихме, е $k_1 k_2$. Отговорът е $(k_1 + k_2) 2^n - k_1 k_2$.

| x_1, x_2, \dots, x_n | y_1, y_2, \dots, y_n | g | f |
|--|--|--|--|
| $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 0$ | $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$ | \tilde{g}_0 \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$ | \tilde{f}_0 \tilde{f}_0 \tilde{f}_0 ... \tilde{f}_0 \tilde{f}_0 |
| $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 0, 1$ | $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$ | \tilde{g}_0 \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$ | \tilde{f}_1 \tilde{f}_1 \tilde{f}_1 ... \tilde{f}_1 \tilde{f}_1 |
| | | | |
| $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ $1, 1, \dots, 1, 1$ | $0, 0, \dots, 0, 0$ $0, 0, \dots, 0, 1$ $0, 0, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 0$ $1, 1, \dots, 1, 1$ | \tilde{g}_0 \tilde{g}_1 \tilde{g}_2 ... $\tilde{g}_{2^{n-2}}$ $\tilde{g}_{2^{n-1}}$ | $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$... $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ $\tilde{f}_{2^{n-1}}$ |

2^n копия на $00 \dots 00$

2^n копия на $00 \dots 01$

2^n копия на $11 \dots 11$

всички n -вектори, лексикографски

всички n -вектори, лексикографски

всички n -вектори, лексикографски

pattern с k_2 единици

същият pattern с k_2 ед.

същият pattern с k_2 ед.

2^n еднакви ст-сти

2^n еднакви ст-сти

2^n еднакви ст-сти

от всички тези, 2^n на брой, групи, всяка от 2^n еднакви ст-сти, точно k_1 групи са от единици



3 Благодарности

Авторът благодари много на **Добромир Кралчев** за многобройните корекции на граматически и стилистични грешки, както и за корекциите на грешки в решенията на две от задачите.