Поправителен изпит по Дизайн и анализ на алгоритми, 03.09.2018 г.

Име: .... ФН: .... Група: .... Спец.: .....

Зад.	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
точки					
от макс.	25	25	25	25	100

Зад. 1 Дадена е група от n човека, които се следят взаимно. Не правим **никакви** ограничаващи допускания за следенията – може никой да не следи никого, може всеки да следи всички останали, може да е някакъв междинен вариант. Единственото допускане, което правим, е очевидното – никой не следи себе си.

След извършени наблюдения получаваме множество данни от вида "човек А следи човек Б". Да допуснем, че наблюденията са изчерпателни в смисъл, че в групата няма други следения.

Верига наричаме всяка редица $i_1, i_2, \ldots, i_k$, където $k \geq 2$ и i_j са хора от групата за $1 \leq j \leq k$ и имаме наблюдение, че i_j следи i_{j+1}, за $1 \leq j < k$. Предложете алгоритъм с колкото е възможно по-добра асимптотична сложност по време, който или намира верига с максимална (крайна) дължина, или намира, че няма вериги изобщо, или намира, че има безкрайна верига (тоест, че за всяко $\ell \in \mathbb{N}$ има верига с дължина ℓ). Обосновете накратко коректността на Вашия алгоритъм и асимптотичната оценка на сложността по време.

Зад. 2 Разгледайте следната изчислителна задача за разпознаване.

Изчислителна задача ЗадачаX
Общ пример: Масив $A[1 \ldots n]$ от цели числа
Въпрос: Дали има индекси i, j, k, такива че $1 \leq i < j < k \leq n$ и $A[i] + A[j] + A[k] = 0$?

Предложете алгоритъм за тази задача със сложност по време $O(n^2)$ и накратко обосновете коректността му и сложността му по време. Може да викате алгоритми, изучавани на лекции, без да обосновавате сложността им или коректността им.

Упътване: Има квадратичен алгоритъм за задачата, базиран на следното тривиално наблюдение: ако има такава тройка, то тя има най-малък елемент. Да проверим за всеки елемент z—без последния и предпоследния—дали този z не е най-малкият участник в тройка със сума нула. Другите два елемента, ако изобщо има такива, са строго по-големи от z. За да имаме квадратичен алгоритъм, трябва за даден z да проверим ***в не по-лошо от линейно време*** *дали има два елемента, които, сумирани със z, дават нула. За да постигнем линейно време за тази подзадача да използваме транзитивността на релацията на наредба върху числа така: за дадено z, ако най-малкото число, по-голямо или равно на z, плюс най-голямото число, по-голямо или равно на z, плюс самото z дават нула, то отговорът е ДА; в противен случай тази сума или е положителна, или е отрицателна. Какво следва от това?*

Зад. 3 Решете рекурентното уравнение

$$T(n) = T(\lg n) + \frac{n}{\lg n}$$

по индукция. Това означава първо да се сетите какво е решението и после да го докажете по индукция.

Зад. 4 Дадена е следната изчислителна задача за разпознаване:

Изчислителна задача ОРИЕНТИРАН ХАМИЛТОНОВ ПЪТ
Общ пример: Ориентиран граф G и два върха u и v от G
Въпрос: Дали има ориентиран път p в G, такъв че p започва в u, завършва във v и съдържа всички върхове на G точно веднъж?

Подчертавам, че става дума за ориентирани графи, а задачите ХАМИЛТОНОВ ПЪТ и ХАМИЛТОНОВ ЦИКЪЛ, които сме изучавали на лекции, са за неориентирани графи. Понятието "ориентиран път" е синоним на "маршрут" от предмета Дискретни структури. Пита се дали има маршрут от u до v, съдържащ всички върхове точно веднъж.

Докажете, че ОРИЕНТИРАН ХАМИЛТОНОВ ПЪТ е **NP**-пълна задача. Можете да използвате наготово всички резултати от лекциите, но факти, които не са разглеждани или доказвани на лекции, трябва да бъдат доказани във Вашия отговор. Предлагам Ви да използвате наготово доказания на лекции факт, че ХАМИЛТОНОВ ЦИКЪЛ (в неориентирани графи) е **NP**-пълна задача, за да докажете един междинен резултат – че ХАМИЛТОНОВ ЦИКЪЛ в ориентиран вариант остава **NP**-пълна, и от този факт да докажете, че ОРИЕНТИРАН ХАМИЛТОНОВ ПЪТ, която е дефинирана горе, е **NP**-пълна.