Поправителен изпит по Дизайн и анализ на алгоритми, 03.09.2018 г.

Име:.. ФN°:............ Група:.... Спец.:.....

Зад.	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
точки					
от макс.	25	25	25	25	100

Зад. 1 Даден е ориентиран граф $G = (V, E)$, за който е известно, че

- всеки връх има полустепен на входа едно (тоест, има точно едно влизащо ребро);
- съществува връх $u \in V$, такъв че за всеки друг връх $v \in V$ има ориентиран път (тоест, маршрут) от u до v.

10 т. Предложете ефикасен алгоритъм, който казва дали G е dag или не. "dag" означава ориентиран граф без ориентирани цикли (контури). Точки ще се дават само на решения с оптимална, в асимптотичния смисъл, сложност. Обосновете накратко коректността и сложността по време на алгоритъма.

15 т. Ако G не е dag, предложете ефикасен алгоритъм, който намира множество $E' \subseteq E$, такова че $|E'|$ е минимално и освен това премахването на ребрата от E' води до това, че G става dag. Обосновете накратко коректността и сложността по време на алгоритъма.

Зад. 2 Вие сте на изпит, на който има n въпроса q_1, q_2, ..., q_n. За всяко i, въпрос q_i дава p_i точки за вярно решение. Вие не виждате всички въпроси едновременно, а те Ви излизат след друг в реда на номерирането. Когато видите даден въпрос, може да отговорите на него или да го прескочите, но, ако го прескочите, губите възможността да му отговорите и така губите точките за него. Въпросите са такива, че Вие можете да отговорите вярно на всеки от тях.

Това обаче не Ви гарантира автоматично $\sum_{i=1}^{n} p_i$ точки! Има една уловка: някои от въпросите са дразнещи, и то толкова дразнещи, че ако отговорите на дразнещ въпрос, то задължително ще прескочите няколко следващи въпроса. По-прецизно казано, за всеки въпрос q_i е дадено някакво неотрицателно число t_i, такова че ако отговорите на q_i, то задължително ще прескочите въпроси q_{i+1}, ..., q_{i+t_i}. Стойностите t_i са такива, че $i + t_i$ никога не надхвърля n.

Предложете колкото е възможно по-ефикасен алгоритъм, който за всеки вход $(n, p_1, \ldots, p_n, t_1, \ldots, t_n)$ връща максималния брой точки, който можете да получите. Съвсем накратко обосновете коректността и сложността му по време.

Зад. 3 Нека $f_1 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$, $f_2 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ и $f_3 : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$. Докажете или опровергайте следното твърдение:

$$f_1(n) + f_2(n) \asymp f_1(n) + f_3(n) \quad \to \quad f_2(n) \asymp f_3(n) \text{ или } f_2(n) \preceq f_3(n) \text{ или } f_2(n) \succeq f_3(n)$$

Зад. 4 Вие сте майстор-готвач, който трябва да приготви ядене, разполагайки с n съставки i_1, i_2, ..., i_n. Приготвянето на яденето е изключително просто: избирате някакви съставки, тоест подмножество на $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$, слагате ги в тенджерата, загрявате ги и готово (тенджерата е достатъчно голяма). Целта Ви е да направите ядене с колкото е възможно повече съставки. Обаче, някои съставки са по двойки несъвместими в някаква степен. По-прецизно казано, за всеки j, k, такива че $1 \leq j < k \leq n$, е дадено реално число $C_{j,k} \in [0, 1]$, което изразява несъвместимостта между съставки i_j и i_k: ако $C_{j,k} = 0$, те са максимално съвместими, ако $C_{j,k} = 1$, те са максимално несъвместими, ако $0 < C_{j,k} < 1$, то те имат известна несъвместимост, зададена от това число. Качеството на яденето е **сумата** от взаимните несъвместимости между (ненаредените) двойки участващи съставки в него.

Дадена е триъгълната таблица от взаимните несъвместимости между двойките съставки и освен това е дадено число p. Задачата е да приготвите ядене с поне p съставки, което да има колкото е възможно по-добро качество (с други думи, колкото е възможно по-малка сума от несъвместимости). Докажете, че тази задача е практически нерешима (intractable) при допускането, че $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$. За целта покажете, че тази задача—която не е задача за разпознаване—съдържа в себе си подзадача, която е задача за разпознаване и е $\mathbf{NP}$-пълна.