Първо домашно по Дискретни структури, 06.11.2018г.

Име: ___________________________________, ФН:______, Група:____

Задача	1	2	3	4a	4b	Общо
получени точки						
максимум точки	1	1	1	1	1	5

Задача 1. Докажете, че за всяко естествено $n > 0$ е вярно равенството:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Задача 2. Дадени са функциите $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тяхната композиция $h(x) = g(f(x))$ е инекция.

Докажете, че:

(a) Ако f не е инекция, g не е тотална.

(b) Ако g не е инекция, f не е сюрекция.

Задача 3. Даден е равностранен триъгълник с дължина на страната $n > 0$. Докажете, че както и да се изберат $n^2 + 1$ точки от вътрешността на триъгълника, то между тях ще има поне две на разстояние, по-малко или равно на 1.

Упътване: Използвайте наготово следното твърдение: всяка отсечка между две точки в произволен триъгълник е не по-дълга от най-голямата му страна; равенство се достига само когато точките са краищата на тази страна.

Задача 4. Нека A е множеството от всички безкрайни редици $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$, състоящи се от нули и единици ($\alpha_i \in \{0, 1\}$).

Определяме релацията $R \subseteq A \times A$ така – две редици $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots$ и $\beta = \beta_0\beta_1\beta_2\ldots$ са в релация, когато се различават на краен брой позиции.

(a.1) Докажете, че R е релация на еквивалентност.

(a.2) Докажете, че класовете на еквивалентност, породени от R са безкрайни изброими множества.

(b) Нека $F = \{[\alpha] | \alpha \in A\}$ е множеството от класовете на еквивалентност, породени от R. Докажете, че F е неизброимо.

Срок за предаване: Предайте домашното на асистента на вашата група преди започване на упражнението през седмицата 26-30 ноември 2018 г.!

Решения

Задача 1.

Използваме индукция.

Задача 2.

И двете подусловия доказваме с допускане на противното:

(a) Нека f не е инекция и g е тотална.

Щом f не е инекция, съществуват $x_1 \neq x_2$, такива че $f(x_1) = f(x_2) = y$.

Щом g е тотална, тя е дефинирана за y, нека $g(y) = z$.

Тогава $h(x_1) = g(f(x_1)) = g(y) = z$ и $h(x_2) = g(f(x_2)) = g(y) = z$, следователно h не е инекция, противоречие.

(b) Нека g не е инекция и f е сюрекция.

Щом g не е инекция, съществуват $y_1 \neq y_2$, такива че $g(y_1) = g(y_2) = z$.

Щом f е сюрекция, y_1 и y_2 имат прообрази x_1 и x_2, такива че $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$. Освен това $x_1 \neq x_2$, защото f е функция.

Пак намерихме $x_1 \neq x_2$, такива че $h(x_1) = h(x_2)$, противоречие.

Задача 3.

Нека триъгълникът е ABC. Нарязваме го с прави, успоредни на страните на равностранни триъгълници със страна 1.

Използваме задача 1 и съобразяваме, че броят на малките триъгълници е n^2.

Както и да избираме $n^2 + 1$ точки в $\triangle ABC$, поне две от тях ще попаднат в един от малките триъгълника (следствие от принципа на Дирихле).

Ползваме упътването за такава двойка точки. Дължината на свързващата ги отсечка ще е най-много 1 – дължината на страната на съдържащия ги малък триъгълник.

Задача 4.

Свойството $(\alpha, \beta) \in R$ можем да изкажем така – съществува $n_0 \in \mathbb{N}$, такова че за всяко $i > n_0, \alpha_i = \beta_i$. Достатъчно е за n_0 да изберем най-големия номер на позиция, в която двете редици се различават.

(a.1) Рефлексивността на R следва от факта, че всяка редица се различава от себе си в нула позиции.

Симетричността на R също следва тривиално от симетричността на дефиницията на релацията.

Транзитивност: нека $(\alpha, \beta) \in R, \quad (\beta, \gamma) \in R$. Съществуват номера n_0, n_1, такива, че за $i > n_0, \alpha_i = \beta_i$ и за $i > n_1, \beta_i = \gamma_i$. Нека $n_2 = max(n_0, n_1)$, тогава за всяко $i > n_2, \alpha_i = \beta_i, \beta_i = \gamma_i$, следователно за $i > n_2, \alpha_i = \gamma_i$, тоест $(\alpha, \gamma) \in R$.

(a.2) Нека $\alpha \in A$ е редица от нули и единици, а $[\alpha]$ е породеният от нея клас на еквивалентност относно релацията R. Построяваме биекция между $[\alpha]$ и $\mathbb{N}$ така:

На α съпоставяме 0.

Нека $\beta \neq \alpha, (\alpha, \beta) \in R$. Редиците α и β се различават на поне една позиция, нека n е най-големият номер на позиция, в която се различават.

Строим двоично число j с $n+1$ цифри, което има единици в позиции, където α и β се различават, като броим позициите от n към 0.

Старшата цифра на j е единица, тоест $j > 0$. На β съпоставяме числото j.

Лесно се вижда, че построеното съпоставяне е биекция, следователно $[\alpha]$ е изброимо безкрайно множество.

(b) Допускаме, че F е крайно или изброимо.

Тъй като A е обединение на елементите на F, и в двата случая ще се окаже, че A е изброимо, тъка като в подусловие (a) доказахме, че множествата от F са изброими.

От доказателството на теоремата на Кантор (диагоналния метод) знаем, че $|A| = |2^{\mathbb{N}}|$, тоест A не е изброимо, противоречие.