

Числени методи, СИ и ИС, втори курс,  
2018/2019  
Допълнителни задачи за подготовка за контролна  
работа No 1

**Задача 1.** Относителната плътност на въздуха  $\rho$  е измерена на различна височина с висока точност. Резултатите от измерванията са систематизирани в следната таблица:

$h, km$	0	1.525	3.05	4.575	6.1
$\rho$	1	0.8617	0.7385	0.6292	0.5328

Като използвате интерполационната формула на Лагранж и системата Mathematica, определете приблизително каква е относителната плътност на височина 3 км. (Възлите на интерполация да се вземат от автоматично генериран по подходящ начин списък, а базисните полиноми да са написани явно, т.е. без да се използват вече дефинираните за това функции).

Илюстрирайте графично как  $\rho$  се изменя, в зависимост от височината, като построите графиката на полинома и точките в една координатна система.

**Задача 2.** Като използвате метода на неопределените коефициенти (т.е. като решите съответната линейна система за коефициентите), намерете полином, удовлетворяващ интерполационните условия

$$P(0) = 1, P'(0) = 0, P(1) = 2, P'(1) = 6, P(2) = 21.$$

**Задача 3.** Да се приближи функцията  $f(x) = \cos x$ :

- като се намери интерполационният полином на Лагранж с възли  $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ ;
- като се намери интерполационният полином на Ермит с възли  $0, \frac{\pi}{2}$  и съответстващи и кратности  $-2$  и  $1$ .
- Да се построят графиките на относителните грешки (по абсолютна стойност) в интервала на интерполация за двата случая. Да се сравни къде апроксимацията е по-добра.

*Забележка.* Да не се използва вградената функция `InterpolatingPolynomial`.

**Задача 4.** Дадена е функцията  $f(x) = \sin x + \cos x$ . Построен е интерполационният полином на Лагранж  $L_3(f; x)$ . Намерете оценката на грешката  $R(x) = |f(x) - L_3(f; x)|$  в интервала  $[x_0, x_3]$ , като използвате Теоремата за оценка на грешката, и постройте графиката ѝ. Възлите на интерполация са:

- $x_0 = -1, x_1 = -0.3, x_2 = 0.3, x_3 = 1$ ;
- Чебишовите възли в интервала  $[-1, 1]$ .

В кой случай оценката на грешката е по-добра? Защо?

**Задача 5.** Да се дефинира функция  $NewtonForward[n_, x0_, h_, f_, x_]$ , която построява интерполационния полином на Лагранж от степен  $n$  за функцията  $f(x)$  с възли  $\{x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}\}$ , като използва формулата на Нютон за интерполиране напред. Решението да е итеративно (да не се използват вградените в Mathematica функции за намиране на сума).

**Задача 6.** Да се дефинира функция  $Newton[n_, x0_, h_, f_, x_]$ , която построява интерполационния полином на Лагранж от степен  $n$  за функцията  $f(x)$  с възли  $\{x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}\}$ , като използва формулата на Нютон с разделени разлики. Решението да е итеративно (да не се използват вградените в Mathematica функции за намиране на сума).

**Задача 7.** Да се дефинира функция  $Lagrange[n_, x0_, h_, f_, x_]$ , която построява интерполационния полином на Лагранж от степен  $n$  за функцията  $f(x)$  с възли  $\{x_i = x_0 + ih, i = \overline{0, n}\}$ , като използва формулата на Лагранж. Решението да е итеративно (да не се използват вградените в Mathematica функции за намиране на сума).

*Забележка.* Горните три задачи да се тестват с данните от Задача 1. Уверете се, че получавате еднакви резултати.

**Задача 8.** Дадени са стойности в 5 точки от сигнал от даден акселерометър (сензор, измерващ линейно ускорение). След подходяща смяна на мерната единица, сигналът се описва от периодична функция с период  $T = 2\pi$ . Да се намери обобщен полином по подходящ базис, интерполиращ тези точки. Да се илюстрира графично, като се визуализират точките и графиката на полинома в една координатна система.

$t, ms$	0	1.5	3	4	6
ускорение, $m/s^2$	0	1	1.5	4	2

**Задача 9.** Дадени са данни за усвояването на лекарство от организма. В таблицата е дадена концентрацията на лекарството в кръвта, като функция на времето. Да се намери обобщен полином по подходящ базис, който описва процеса.

$t, h$	0	2	4	6	8
концентрация, ‰	0.1	0.009	0.0011	0.00003	0.0000012

Примерни базиси за последните две задачи:

1.  $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ ,
2.  $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ ,
3.  $\{1, e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}\}$ ,
4.  $\{1/(1+x), 1/(2+x), \dots, 1/(n+x)\}$ ,
5.  $\{1, e^{-x}, e^{-2x}, \dots, e^{-nx}\}$ ,
6.  $\{1/(1-x), 1/(2-x), \dots, 1/(n-x)\}$ .