Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2018/2019 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	Общо
получени точки				
максимум точки	*30*	*20*	*50*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Нека G е краен неориентиран граф (без примки), а v_0 е неизолиран връх на G, $\mathcal{M}$ е множеството от пътищата в G, които започват от v_0 и не повтарят върхове. Тези пътища са с положителни дължини, защото v_0 е неизолиран връх, и са краен брой, поради което сред дължините им има една най-голяма, да я означим с k. Числото k е цяло положително. По определение в $\mathcal{M}$ има поне един път с дължина k, но може да има още такива пътища. Нека $\mathcal{N}$ е множеството на пътищата от $\mathcal{M}$ с дължина k. Множеството $\mathcal{N}$ е непразно и крайно. Произволен път от $\mathcal{N}$ започва от v_0, има $k+1$ върха, два по два различни, и k ребра:

$$v_0 \text{ —— } v_1 \text{ —— } v_2 \text{ —— } v_3 \text{ —— } \ldots \text{ —— } v_{k-1} \text{ —— } v_k\,.$$

Върха v_k ще наричаме край на пътя. Всички пътища от $\mathcal{N}$ имат едно и също начало v_0, обаче може да имат различни краища v_k. Нека $d\left(v_k\right)$ е степента на v_k.

а) Докажете, че $1 \leq d\left(v_k\right) \leq k$. **(5 точки)**

Ако краят v_k на най-дълъг път е свързан в G с някой връх v_i от същия път, различен от v_{k-1} (т.е. i е някой от индексите $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2$), то можем да получим друг най-дълъг път, като вземем реброто $v_i\,v_k$ вместо $v_i\,v_{i+1}$:

$$v_0 \text{ —— } \ldots \text{ —— } v_{i-1} \text{ —— } v_i \text{ —— } v_k \text{ —— } v_{k-1} \text{ —— } \ldots \text{ —— } v_{i+1}\,.$$

Описаната операция се нарича *елементарна трансформация*. Приложена върху път от $\mathcal{N}$, тя поражда друг път от $\mathcal{N}$.

б) В графа, образуван от върховете и ребрата на куб, изберете един най-дълъг (прост) път и намерете всичките му елементарни трансформации. **(5 точки)**

в) Нека $v_0 \text{ —— } v_1 \text{ —— } v_2 \text{ —— } v_3 \text{ —— } \ldots \text{ —— } v_{k-1} \text{ —— } v_k$ е път от $\mathcal{N}$. Изразете броя на неговите елементарни трансформации чрез $d\left(v_k\right)$. **(5 точки)**

г) Нека W е множеството от онези върхове на G, чиито степени са четни. Означаваме с $\mathcal{P}$ множеството на пътищата от $\mathcal{N}$ с краища от W (да се има предвид, че v_0 е начало, а не край). Докажете, че в $\mathcal{P}$ има четен брой пътища (включително нито един). **(15 точки)**

Задача 2. Докажете, че ако всички върхове на краен неориентиран граф са от нечетна степен, то всяко ребро се съдържа в четен брой хамилтонови цикли (включително нито един).

Упътване: Използвайте задача 1.

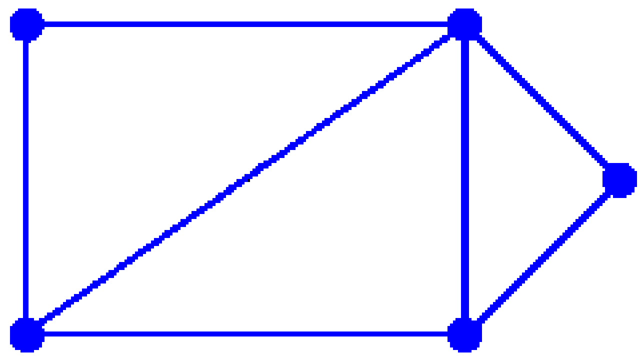
Задача 3. За всеки краен планарен мултиграф G дефинираме мултиграф H така:
— върхове на H са лицата на G;
— ребрата на H свързват лицата на G, които имат общо ребро от G (а не просто общ връх).

Мултиграфът H се нарича *дуален* на G.

Дори ако G няма кратни ребра, H все пак може да има. Това става тогава и само тогава, когато някои две лица на G имат поне две общи ребра. Една възможност (не единствената) е G да съдържа връх от втора степен; ребрата от този връх удовлетворяват изискването.

Допустимо е G да съдържа примки. Дори ако G няма примки, H все пак може да има. Това се случва, когато G съдържа ребро, от двете страни на което стои едно и също лице.

а) Нека G е графът, показан на чертежа. Постройте неговия дуален мултиграф H. Обърнете внимание как се получават кратните ребра на H. **(5 точки)**



б) За всеки планарен мултиграф неговият дуален мултиграф също е планарен. За общия случай предложете подходящо интуитивно обяснение. Уточнете го за частния случай, когато ограничените лица на първоначалния мултиграф са изпъкнали фигури **(5 точки)**

в) Дуалният мултиграф H зависи не само от първоначалния мултиграф G, а също така от конкретното влагане на G в равнината. Илюстрирайте това твърдение с пример, като построите подходящ планарен мултиграф G и две негови влагания в равнина, от които се получават неизоморфни дуални мултиграфи. **(5 точки)**

г) Един мултиграф се нарича *автодуален*, ако е изоморфен на дуалния си мултиграф. Постройте пример за автодуален мултиграф. **(5 точки)**

д) Докажете, че дуалният мултиграф винаги е свързан. **(5 точки)**

е) Нека G е произволен планарен мултиграф, а H е дуалният мултиграф на G.
— Постройте биекция между лицата на G и върховете на H. **(5 точки)**
— Постройте биекция между ребрата на G и ребрата на H. **(5 точки)**
— Ако G е свързан, постройте биекция между върховете на G и лицата на H. **(5 точки)**
Ако G е несвързан, покажете с пример, че може да няма такава биекция. **(3 точки)**
— Докажете, че G е свързан $\Longleftrightarrow$ дуалният мултиграф на H е изоморфен на G. **(7 точки)**