Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2018/2019 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	Общо
получени точки				
максимум точки	*25*	*25*	*50*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Нека K_n е пълният неориентиран граф с n върха без примки, а $P(n\,,\, r)$ е следното съждение: "Както и да оцветим ребрата на K_n с r цвята, ще има едноцветен триъгълник."

а) Докажете твърдението $P(6,\; 2)$ чрез принципа на Дирихле. **(5 точки)**

б) Докажете твърдението $P(17,\; 3)$, като го сведете до $P(6,\; 2)$ чрез принципа на Дирихле. **(5 точки)**

в) За всяко цяло положително r намерете най-малкото $n = n(r)$, за което твърдението $P(n\,,\, r)$ може да се докаже по подобен начин, т.е. чрез свеждане на $P(n(r)\,,\, r)$ до $P(n(r-1)\,,\, r-1)$ с помощта на принципа на Дирихле. (Забележете, че не се търси най-малкото n, за което $P(n\,,\, r)$ е истина. Това е нерешена задача.) Опростете формулата за $n(r)$ колкото може повече. Тя трябва да бъде точна (без приближения) и затворена (да не съдържа многоточия и непресметнати суми и произведения с променлив брой членове). Допустимо е формулата да съдържа факториели. **(15 точки)**

Задача 2. Нека $n(!)^2 = (n!)!$, $n(!)^3 = ((n!)!)!$, изобщо $n(!)^k = (\dots(n!)!\,\dots)!$ с k удивителни. В частност, $n(!)^1 = n!$, $n(!)^0 = n$. Трябва да се прави разлика между $n(!)^k$ и $(n!)^k$. Например $3(!)^2 = (3!)! = 6! = 720$, а пък $(3!)^2 = 6^2 = 36$.

Докажете, че $n(!)^k$ се дели на $(n!)^{\left(n(!)^0 - 1\right)!\;\left(n(!)^1 - 1\right)!\;\left(n(!)^2 - 1\right)!\;\dots\;\left(n(!)^{k-2} - 1\right)!}$ при $k \geq 2$.

Задача 3. Намерете броя на пермутациите $a_1\,,\, a_2\,,\,\dots\,,\, a_n$ на числата $1,\, 2,\,\dots\,,\, n$ с единствен индекс i (зависещ от пермутацията), за който $a_i > a_{i+1}$, тоест $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \dots < a_{n-1} < a_n$.
Задачата да се реши по два начина — със и без рекурентно уравнение.

(Всеки от тези два начина носи по 25 точки.)

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Ще докажем, че както и да оцветим ребрата на K_6 с два цвята (например червен и син), непременно ще има едноцветен триъгълник. Действително, да изберем произволен връх A. От A излизат пет ребра и те са оцветени с два цвята. Тъй като $5 : 2 = 2$ и остатък 1, то от принципа на Дирихле следва, че поне три от ребрата, излизащи от A, са едноцветни. Нека например ребрата AB, AC и AD са червени. Ако трите ребра BC, CD и BD са сини, то BCD е едноцветен (син) триъгълник. Ако поне едно от ребрата BC, CD и BD е червено, то заедно с върха A образува червен триъгълник.

б) Както и да оцветим ребрата на K_{17} с три цвята (например червен, зелен и син), непременно ще има едноцветен триъгълник. Доказателството е подобно на предишното. От кой да е връх A излизат 16 ребра. Тъй като $16 : 3 = 5$ и остатък 1, то от принципа на Дирихле следва, че поне шест ребра от A имат еднакъв цвят (например зелен). Краищата им, различни от A, са шест на брой и образуват подграф, изоморфен на K_6. Ако някое от ребрата му е зелено, то заедно с A образува зелен триъгълник. Ако пък всичките му ребра са червени или сини, то подграфът съдържа едноцветен триъгълник според доказаното в подточка "а".

в) Дотук разполагаме с двете равенства $n(2) = 6$, $n(3) = 17$, към които можем да добавим тривиалното равенство $n(1) = 3$. По-лесно е да получим формула за броя a_r на ребрата, излизащи от произволен връх на графа $K_{n(r)}$. Това е достатъчно, защото $n(r) = a_r + 1$.

Вече знаем първите няколко члена на редицата a_r: $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 16$. Намираме рекурентно уравнение чрез разсъждения, подобни на тези от предишната подточка. От кой да е връх на $K_{n(r)}$ излизат a_r ребра. Понеже има r цвята, от принципа на Дирихле следва, че поне $\left\lceil \frac{a_r}{r} \right\rceil$ от тези ребра са едноцветни. Другите им краища трябва да образуват подграф, изоморфен на $K_{n(r-1)}$, затова $\left\lceil \frac{a_r}{r} \right\rceil = n(r-1) = a_{r-1} + 1$. Най-малкото a_r, което удовлетворява това равенство, е

$$a_r = r\,a_{r-1} + 1 \text{ за всяко цяло } r \geq 2.$$

Делим на $r!$ и развиваме полученото рекурентно уравнение:

$$\frac{a_r}{r!} = \frac{a_{r-1}}{(r-1)!} + \frac{1}{r!} = \frac{a_{r-2}}{(r-2)!} + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!} = \frac{a_{r-3}}{(r-3)!} + \frac{1}{(r-2)!} + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!} = \cdots$$

Като развием докрай, получаваме

$$\frac{a_r}{r!} = \frac{a_1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(r-2)!} + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!}.$$

Заместваме $a_1 = 2$:

$$\frac{a_r}{r!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{(r-2)!} + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!},$$

откъдето

$$a_r = r!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}\right) \text{ за всяко цяло } r \geq 1.$$

От формулата на Маклорен следва, че за всяко $x \neq 0$ съществува γ между 0 и x, за което

$$f(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(0)}{r!}\,x^r + \frac{f^{(r+1)}(\gamma)}{(r+1)!}\,x^{r+1}.$$

Всички производни на функцията $f(x) = e^x$ са равни на e^x, а пък $e^0 = 1$, ето защо

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{r!}\,x^r + \frac{e^\gamma}{(r+1)!}\,x^{r+1}.$$

При $x = 1$ следва, че съществува $\gamma \in (0\,;\,1)$, за което

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!} + \frac{e^\gamma}{(r+1)!}\,.$$

Следователно

$$r!\,e = r!\left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{r!}\right) + \frac{e^\gamma}{r+1}\,,$$

тоест

$$r!\,e = a_r + \frac{e^\gamma}{r+1}\,.$$

Тъй като $0 < \gamma < 1$, то $1 < e^\gamma < e < 3 \leq r+1$ при $r \geq 2$, затова $0 < \dfrac{e^\gamma}{r+1} < 1$, докато a_r е цяло число. Следователно $r!\,e$ е дробно и a_r е неговата цяла част:

$$a_r = \lfloor r!\,e \rfloor\,.$$

Оттук намираме

$$n(r) = a_r + 1 = \lfloor r!\,e \rfloor + 1.$$

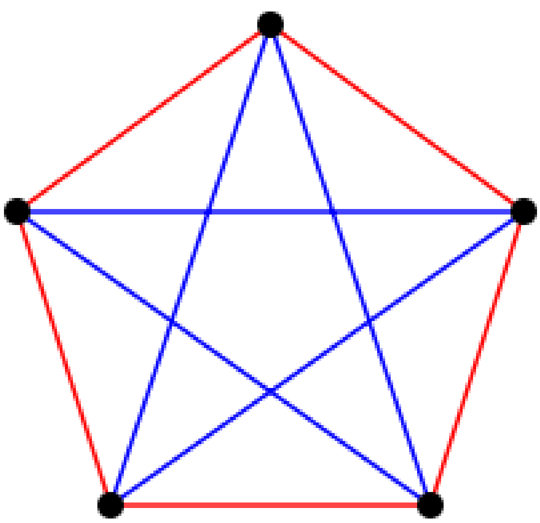
Понеже $r!\,e$ е дробно число и $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$ за всички дробни x, то

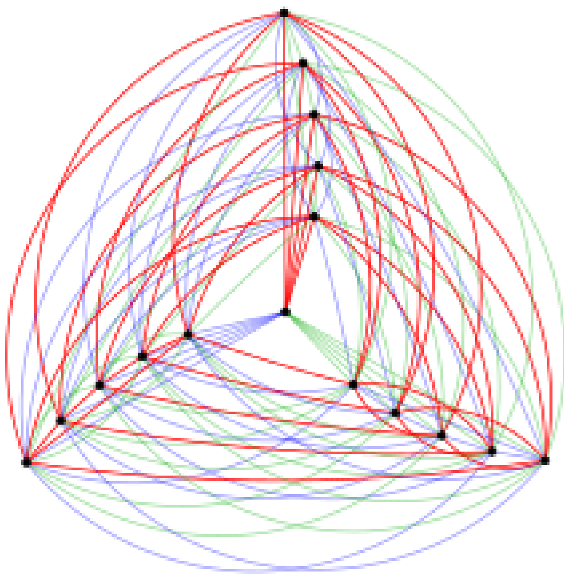
$$n(r) = \lceil r!\,e \rceil\,,$$

което е отговорът на задачата. Така например, $n(3) = \lceil 3!\,e \rceil = \lceil 6\,.\,2{,}71828\ldots \rceil = \lceil 16{,}3\ldots \rceil = 17$.

Въпреки че формулата бе изведена при $r \geq 2$, тя важи и при $r = 1$, което се проверява непосредствено: $n(1) = \lceil 1!\,e \rceil = \lceil 2{,}7\ldots \rceil = 3$.

Числата $n(2) = 6$ и $n(3) = 17$ са минималните n, за които е сигурно, че както и да оцветим ребрата на K_n с два или три цвята съответно, със сигурност ще получим едноцветен триъгълник. Това личи от оцветяванията на K_5 и K_{16} без едноцветни триъгълници.





Обаче числото $n(4) = 66$ вече не е минимално в този смисъл, защото, както и да оцветим ребрата на K_{62} с четири цвята, ще получим едноцветен триъгълник. Това е трудна задача, която не може да бъде решена по лесния начин, по който бяха решени първите две подточки.

Задача 2 (Simon Mowshowitz). Произведението на кои да е n на брой последователни цели положителни числа се дели на $n!$, защото частното

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$$

е цяло число — броят на комбинациите без повторение на m елемента от n-ти клас. Ето защо произведението на кои да е pn последователни цели положителни числа се дели на $(n!)^p$, понеже те могат да бъдат разбити на p групи от n последователни числа всяка и по един делител $n!$ ще дойде от всяка група.

Числото $n(!)^k = \left(n(!)^{k-1}\right)!$ представлява произведение от $n(!)^{k-1}$ на брой последователни цели положителни числа, следователно то се дели на $(n!)^p$, където $p = \dfrac{n(!)^{k-1}}{n}$.

Остава да докажем, че

$$p \geq \left(n(!)^0 - 1\right)! \ \left(n(!)^1 - 1\right)! \ \left(n(!)^2 - 1\right)! \ \dots \ \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!,$$

тоест

$$\frac{n(!)^{k-1}}{n} \geq \left(n(!)^0 - 1\right)! \ \left(n(!)^1 - 1\right)! \ \left(n(!)^2 - 1\right)! \ \dots \ \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!.$$

Всъщност изпълнено е равенството, както предстои да установим.

От формулата $n! = n(n-1)!$, приложена за $n(!)^{k-2}$ вместо n, получаваме

$$\left(n(!)^{k-2}\right)! = n(!)^{k-2} \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!,$$

тоест

$$n(!)^{k-1} = n(!)^{k-2} \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!.$$

Гледаме на тази формула като на рекурентно уравнение относно $n(!)^{k-1}$ и го развиваме, като в дясната страна заместваме само множителя извън скобите.

$$n(!)^{k-1} = n(!)^{k-3} \left(n(!)^{k-3} - 1\right)! \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!,$$

$$n(!)^{k-1} = n(!)^{k-4} \left(n(!)^{k-4} - 1\right)! \left(n(!)^{k-3} - 1\right)! \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$n(!)^{k-1} = n(!)^0 \left(n(!)^0 - 1\right)! \ \left(n(!)^1 - 1\right)! \ \left(n(!)^2 - 1\right)! \ \dots \ \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!.$$

Заместваме $n(!)^0 = n$:

$$n(!)^{k-1} = n \left(n(!)^0 - 1\right)! \ \left(n(!)^1 - 1\right)! \ \left(n(!)^2 - 1\right)! \ \dots \ \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!$$

и след деление на n получаваме желаното равенство:

$$\frac{n(!)^{k-1}}{n} = \left(n(!)^0 - 1\right)! \ \left(n(!)^1 - 1\right)! \ \left(n(!)^2 - 1\right)! \ \dots \ \left(n(!)^{k-2} - 1\right)!.$$

Задача 3. Нека b_n е броят на пермутациите на n елемента от описания вид, като $n \geq 2$. Чрез непосредствено преброяване намираме $b_2 = 1$ и $b_3 = 4$. Разглеждаме всички възможни случаи за мястото k на числото n, т.е. $a_k = n$.

Ако $k < n$, тоест числото n не е на последно място в пермутацията, то $a_k > a_{k+1}$, защото n е най-голямото число в пермутацията. Следователно индексът k играе ролята на индекса i от условието на задачата, тоест

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots \ < a_{k-1} < a_k > a_{k+1} < a_{k+2} < a_{k+3} < \ \ldots \ < a_{n-1} < a_n \,.$$

Такава редица се определя еднозначно от множеството $\left\{ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} \right\}$, а именно: нареждаме числата от множеството във възходящ ред, след тях пишем n, след него идват останалите числа, също във възходящ ред. Тоест има биекция между редиците от вида

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots \ < a_{k-1} < a_k > a_{k+1} < a_{k+2} < a_{k+3} < \ \ldots \ < a_{n-1} < a_n$$

и множествата $\left\{ a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ ,\ a_{k-1} \right\}$. Затова редиците са колкото множествата, т.е. C_{n-1}^{k-1}, защото всяко множество се състои от $k-1$ елемента, избрани измежду числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$. Сумираме по възможните стойности на k:

$$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} \ = \ \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} \ = \ \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \ = \ -\binom{n-1}{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \ = \ 2^{\,n-1} - 1.$$

В последното равенство е използвано тъждеството

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \ = \ 2^{\,n-1},$$

което се получава, като заместим $x = 1$ в биномната формула на Нютон

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \ = \ (1+x)^{n-1}.$$

Остава да разгледаме случая $k = n$, тоест $a_n = n$, което означава, че най-голямото число n се намира на последно място в редицата:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots \ < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \ \ldots \ < a_{n-1} < a_n = n.$$

Следователно

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ \ldots \ < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \ \ldots \ < a_{n-1}$$

е пермутация от същия вид, само че е образувана от числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1$, тоест тя е по-къса с един член. Броят на тези пермутации е b_{n-1}.

Като съберем всички възможности, получаваме линейно-рекурентно уравнение:

$$b_n = \ b_{n-1} + 2^{\,n-1} - 1, \ \text{ където } \ n \geq 3.$$

То може да се реши чрез характеристично уравнение или чрез развиване, или чрез налучкване и индукция. Решението е

$$b_n = \ 2^{\,n} - n - 1 \ \text{ за всяко цяло } \ n \geq 2.$$

Задачата може да се реши и без рекурентно уравнение — с комбинаторни разсъждения. Всяка редица от вида

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{i-1} < a_i > a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \dots < a_{n-1} < a_n$$

се определя еднозначно от множеството $\left\{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i \right\}$: подреждаме елементите му във възходящ ред, след тях дописваме останалите числа, също във възходящ ред. По този начин сме сигурни, че са изпълнени неравенствата

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{i-1} < a_i \quad \text{и} \quad a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \dots < a_{n-1} < a_n .$$

Единствено неравенството $a_i > a_{i+1}$ може да бъде нарушено, тоест $a_i < a_{i+1}$. Това се случва, когато множеството $\left\{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i \right\}$ се състои от най-малките i числа, тоест съвпада с множеството $\left\{ 1, 2, 3, \dots , i \right\}$. Понеже $1 \le i \le n-1$, забранените множества от този вид са $n-1$ на брой, а именно

$$\left\{ 1 \right\}, \quad \left\{ 1, 2 \right\}, \quad \left\{ 1, 2, 3 \right\}, \quad \dots \quad , \quad \left\{ 1, 2, 3, \dots , n-1 \right\}.$$

Тези $n-1$ множества са забранени, защото, ако за $\left\{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i \right\}$ вземем някое от тях, то съответната пермутация няма да удовлетворява неравенството $a_i > a_{i+1}$. Двете множества

$$\varnothing \quad \text{и} \quad \left\{ 1, 2, 3, \dots , n \right\}$$

също са забранени, но по друга причина: за множеството $\left\{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_i \right\}$ е невъзможно да съвпадне с никое от тях, защото то има i елемента и $1 \le i \le n-1$.

Подмножествата на $\left\{ 1, 2, 3, \dots , n \right\}$ са 2^n; от тях $(n-1)+2 = n+1$ са забранени. Останалите $2^n - (n+1) = 2^n - n - 1$ множества са разрешени. Съответствието

"пермутация от описания вид $\longleftrightarrow$ разрешено множество"

е биекция, затова броят на пермутациите също е $2^n - n - 1$.

Отговор: $2^n - n - 1$.