Домашно № 4 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2018/2019 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	Общо
получени точки				
максимум точки	*30*	*20*	*50*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. Нека G е краен неориентиран граф (без примки), а v_0 е неизолиран връх на G, $\mathcal{M}$ е множеството от пътищата в G, които започват от v_0 и не повтарят върхове. Тези пътища са с положителни дължини, защото v_0 е неизолиран връх, и са краен брой, поради което сред дължините им има една най-голяма, да я означим с k. Числото k е цяло положително. По определение в $\mathcal{M}$ има поне един път с дължина k, но може да има още такива пътища. Нека $\mathcal{N}$ е множеството на пътищата от $\mathcal{M}$ с дължина k. Множеството $\mathcal{N}$ е непразно и крайно. Произволен път от $\mathcal{N}$ започва от v_0, има $k+1$ върха, два по два различни, и k ребра:

$$v_0 \text{ ——— } v_1 \text{ ——— } v_2 \text{ ——— } v_3 \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } v_k \,.$$

Върха v_k ще наричаме край на пътя. Всички пътища от $\mathcal{N}$ имат едно и също начало v_0, обаче може да имат различни краища v_k. Нека $d\left(v_k\right)$ е степента на v_k.

а) Докажете, че $1 \leq d\left(v_k\right) \leq k$. **(5 точки)**

Ако краят v_k на най-дълъг път е свързан в G с някой връх v_i от същия път, различен от v_{k-1} (т.е. i е някой от индексите $0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ k-2$), то можем да получим друг най-дълъг път, като вземем реброто $v_i\,v_k$ вместо $v_i\,v_{i+1}$:

$$v_0 \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{i-1} \text{ ——— } v_i \text{ ——— } v_k \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{i+1} \,.$$

Описаната операция се нарича *елементарна трансформация*. Приложена върху път от $\mathcal{N}$, тя поражда друг път от $\mathcal{N}$.

б) В графа, образуван от върховете и ребрата на куб, изберете един най-дълъг (прост) път и намерете всичките му елементарни трансформации. **(5 точки)**

в) Нека $v_0 \text{ ——— } v_1 \text{ ——— } v_2 \text{ ——— } v_3 \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } v_k$ е път от $\mathcal{N}$. Изразете броя на неговите елементарни трансформации чрез $d\left(v_k\right)$. **(5 точки)**

г) Нека W е множеството от онези върхове на G, чиито степени са четни. Означаваме с $\mathcal{P}$ множеството на пътищата от $\mathcal{N}$ с краища от W (да се има предвид, че v_0 е начало, а не край). Докажете, че в $\mathcal{P}$ има четен брой пътища (включително нито един). **(15 точки)**

Задача 2. Докажете, че ако всички върхове на краен неориентиран граф са от нечетна степен, то всяко ребро се съдържа в четен брой хамилтонови цикли (включително нито един).

Упътване: Използвайте задача 1.

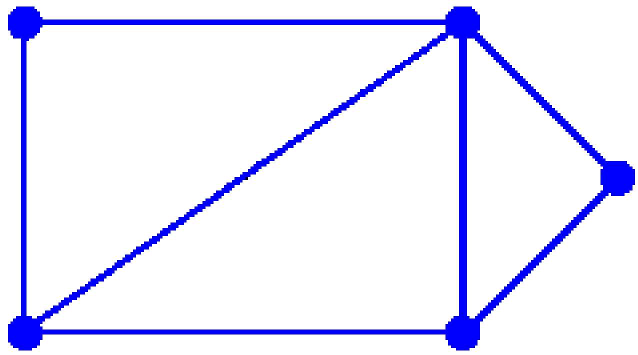
Задача 3. За всеки краен планарен мултиграф G дефинираме мултиграф H така:
— върхове на H са лицата на G;
— ребрата на H свързват лицата на G, които имат общо ребро от G (а не просто общ връх).

Мултиграфът H се нарича *дуален* на G.

Дори ако G няма кратни ребра, H все пак може да има. Това става тогава и само тогава, когато някои две лица на G имат поне две общи ребра. Една възможност (не единствената) е G да съдържа връх от втора степен; ребрата от този връх удовлетворяват изискването.

Допустимо е G да съдържа примки. Дори ако G няма примки, H все пак може да има. Това се случва, когато G съдържа ребро, от двете страни на което стои едно и също лице.

а) Нека G е графът, показан на чертежа. Постройте неговия дуален мултиграф H. Обърнете внимание как се получават кратните ребра на H. **(5 точки)**



б) За всеки планарен мултиграф неговият дуален мултиграф също е планарен. За общия случай предложете подходящо интуитивно обяснение. Уточнете го за частния случай, когато ограничените лица на първоначалния мултиграф са изпъкнали фигури **(5 точки)**

в) Дуалният мултиграф H зависи не само от първоначалния мултиграф G, а също така от конкретното влагане на G в равнината. Илюстрирайте това твърдение с пример, като построите подходящ планарен мултиграф G и две негови влагания в равнина, от които се получават неизоморфни дуални мултиграфи. **(5 точки)**

г) Един мултиграф се нарича *автодуален*, ако е изоморфен на дуалния си мултиграф. Постройте пример за автодуален мултиграф. **(5 точки)**

д) Докажете, че дуалният мултиграф винаги е свързан. **(5 точки)**

е) Нека G е произволен планарен мултиграф, а H е дуалният мултиграф на G.
— Постройте биекция между лицата на G и върховете на H. **(5 точки)**
— Постройте биекция между ребрата на G и ребрата на H. **(5 точки)**
— Ако G е свързан, постройте биекция между върховете на G и лицата на H. **(5 точки)**
Ако G е несвързан, покажете с пример, че може да няма такава биекция. **(3 точки)**
— Докажете, че G е свързан $\Longleftrightarrow$ дуалният мултиграф на H е изоморфен на G. **(7 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1.

а) Неравенството $d\left(v_k\right) \geq 1$ следва от това, че върхът v_k е свързан с поне един друг връх — предходния връх от пътя, т.е. v_{k-1}. Предходен връх непременно има, защото k е положително (ако k беше нула, то v_0 щеше да е изолиран връх в противоречие с условието на задачата).

Нека допуснем, че $d\left(v_k\right) > k$. Тъй като върховете v_0, v_1, $\ldots$, v_{k-1} са k на брой (тоест не стигат), то върхът v_k е свързан чрез ребро с поне един връх u, различен от тях. Но тогава

$$v_0 \text{ ——— } v_1 \text{ ——— } v_2 \text{ ——— } v_3 \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } v_k \text{ ——— } u$$

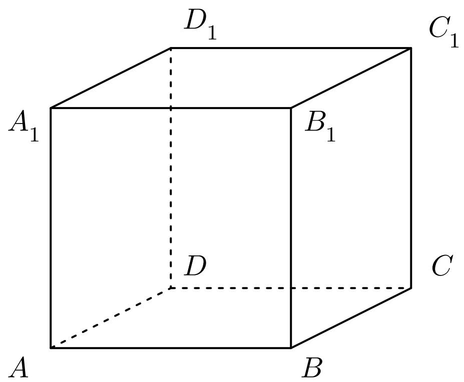
е път от $\mathcal{M}$ с дължина $k+1$, което е противоречие: по определение k е най-голямата дължина на път от $\mathcal{M}$.

Полученото противоречие показва, че направеното допускане не е вярно. Следователно вярно е неравенството от условието на задачата: $d\left(v_k\right) \leq k$.

Окончателно, $1 \leq d\left(v_k\right) \leq k$.

б) Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е куб.
Най-дългите (прости) пътища имат дължина седем. По-голяма дължина е невъзможна, защото кубът има осем върха. Един най-дълъг път е например $ABCDD_1C_1B_1A_1$. Да приемем върха A за начало, а върха A_1 — за край. Тогава пътят притежава две елементарни трансформации:

1) $AA_1B_1C_1D_1DCB$;
2) $ABCDD_1A_1B_1C_1$.



в) Нека $v_0 \text{ ——— } v_1 \text{ ——— } v_2 \text{ ——— } \ldots \text{ ——— } v_{k-1} \text{ ——— } v_k$ е път от $\mathcal{N}$. Тогава всички ребра от v_k са само към други върхове от същия път, както доказахме в подточка "а". Реброто между v_{k-1} и v_k не поражда елементарна трансформация. Останалите ребра от v_k пораждат елементарни трансформации. Следователно броят на елементарните трансформации е с единица по-малък от броя на ребрата, излизащи от v_k, тоест $d\left(v_k\right) - 1$.

г) От доказаното в подточка "в" следва, че път от $\mathcal{N}$ има нечетен брой трансформации $\iff$ числото $d\left(v_k\right) - 1$ е нечетно (където v_k е краят на пътя) $\iff$ $d\left(v_k\right)$ е четно $\iff$ $v_k \in W$ $\iff$ пътят принадлежи на $\mathcal{P}$. По-точно, първата еквивалентност следва от доказаното във "в", втората е свойство на целите числа, а третата и четвъртата са верни по определение.

И така, множеството $\mathcal{P}$ се състои точно от тези пътища от $\mathcal{N}$, които имат нечетен брой елементарни трансформации.

Разглеждаме нов неориентиран граф $\mathcal{H}(\mathcal{N}, \mathcal{E})$. Пътищата от $\mathcal{N}$ са пътища в графа G, но са върхове в графа $\mathcal{H}$. Множеството $\mathcal{E}$ от ребрата на $\mathcal{H}$ се дефинира така: два върха на $\mathcal{H}$ са свързани с ребро $\iff$ съответните пътища в G са елементарни трансформации един на друг. (Графът $\mathcal{H}$ е неориентиран, защото е модел на симетрична релация.)

От по-предишния абзац следва, че $\mathcal{P}$ е множеството от върховете на $\mathcal{H}$ от нечетна степен. В задачата се иска да се докаже, че $\mathcal{P}$ съдържа четен брой елементи. Но това е известен факт: всеки граф има четен брой върхове от нечетна степен (вкл. нито един).

В изложеното решение най-много ни помогна това, че посредством графа $\mathcal{H}$ моделирахме отношението между пътищата в G, зададено от елементарните трансформации. Изводът е, че графите са не просто точки, свързани с чертички, а удобно средство за моделиране на отношения. Върховете на граф могат да бъдат произволни обекти, а ребрата му могат да представят произволна (бинарна) релация между тези обекти.

Задача 2. Ако графът няма ребра, твърдението, което трябва да докажем, е тривиално вярно.

Затова нека графът има ребра. Взимаме едно произволно ребро $v_0\,v$. Ако то не се съдържа в нито един хамилтонов цикъл, следва, че се съдържа в четен брой такива цикли (а именно нула).

Нека реброто $v_0\,v$ се съдържа в поне един хамилтонов цикъл. Да изтрием това ребро и да означим новия граф с G. Върховете му са от нечетна степен (както в първоначалния граф) с изключение на v_0 и v: техните степени са четни, защото намаляха с единица след изтриването на реброто $v_0\,v$.

След изтриването от хамилтоновия цикъл остава хамилтонов път в G с краища v_0 и v. Понеже G е неориентиран граф, можем без ограничение да смятаме, че v_0 е начало, а v е край на хамилтоновия път.

Нещо повече, на всеки хамилтонов цикъл в първоначалния граф, съдържащ реброто $v_0\,v$, съответства хамилтонов път в G с начало v_0 и край v. Обратно: на всеки хамилтонов път в G с начало v_0 и край v съответства хамилтонов цикъл в първоначалния граф, съдържащ $v_0\,v$. Пътят се получава от цикъла чрез изтриване на реброто; цикълът се получава от пътя чрез добавяне на реброто.

Тази биекция ни позволява да преформулираме задачата така: да се докаже, че в графа G има четен брой хамилтонови пътища с начало v_0 и край v. Ще решим задачата в този вид.

По предположение в G има поне един хамилтонов път с начало v_0 и край v. Всеки хамилтонов път е с максимална дължина, а именно $n-1$, където n е броят на върховете на G. Обратното твърдение — че всеки най-дълъг път е хамилтонов — не е вярно в общия случай, ала е вярно в разглеждания случай: най-дългите пътища по определение имат равни дължини, затова, щом един от тях е хамилтонов, то въпросната максимална дължина е $n-1$ и е обща за всички най-дълги пътища, следователно те съдържат по $n-1$ ребра и n различни върха, тоест съдържат всички върхове на G, следователно са хамилтонови пътища.

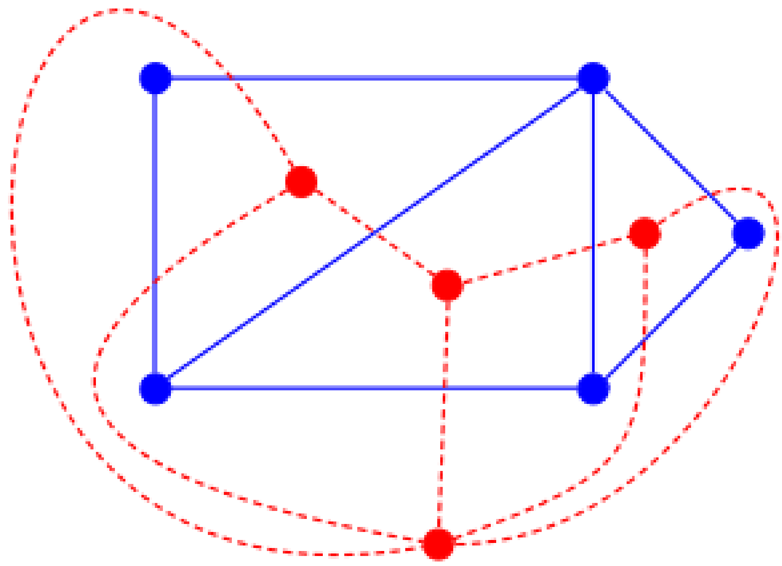
И така, в разглеждания случай няма разлика между най-дълъг път и хамилтонов път. Затова, като използваме обозначенията от задача 1, можем да кажем, че $\mathcal{N}$ е множеството от хамилтоновите пътища в G с начало v_0 и произволен краен връх, $k=n-1$, $W=\left\{v\,,\,v_0\right\}$ е множеството от върховете на G от четна степен, $\mathcal{P}$ е множеството от хамилтоновите пътища в G с начало v_0 и край от W. Тъй като v_0 е начало на пътищата, единственият връх от W, който може да бъде техен край, е върхът v. Следователно множеството $\mathcal{P}$ всъщност съдържа хамилтоновите пътища в G с начало v_0 и край v. От подточка "г" на задача 1 следва, че множеството $\mathcal{P}$ има четен брой елементи, което трябваше да се докаже.

Задача 1 и задача 2 са съответно теорема 16 и теорема 17 от глава IV ("Екстремални задачи") от книгата "Теория на графите" от Бела Болобаш. Книгата я има в превод на български.

Задача 3.

а) Даденият мултиграф G е изобразен на чертежа чрез плътни сини линии, а пък неговият дуален мултиграф H е показан с червен пунктир.

Двата върха на G от степен 2 пораждат кратни ребра в H.



б) За произволен планарен мултиграф G неговият дуален мултиграф H може да бъде построен в равнината на G така, че никои две ребра на H да нямат обща точка (като общ връх не се смята за обща точка). Това се постига чрез внимателно чертаене. Първо избираме всеки връх на H да бъде вътрешна точка за съответното лице на G. След това чертаем ребрата на H едно по едно. Нека вече сме начертали няколко ребра на H (може и нито едно). Ще опишем как се строи поредното ребро на H (то може да е първото). Нека A и B са върховете на H, които искаме да свържем с ребро, и нека U и V са съответните лица на G, т.е. A е вътрешна точка за областта U, а B е вътрешна точка за V. По определение лицата U и V имат общо ребро e от G. Предполагаме две неща:

1) Всяко от дотук построените ребра на H не минава през върхове на G и H и пресича едно ребро на G — общото за лицата, съответстващи на двата върха на реброто от H. При това, двете ребра (реброто от G и реброто от H) имат само една обща точка.
2) Всяко от дотук построените ребра на H не пресича другите ребра на H, нито себе си.

От първото предположение следва, че реброто e все още не е пресечено от никое ребро на H (и от никое ребро на G, защото той е планарен мултиграф). Избираме произволна точка C от реброто e, различна от краищата му. Следователно през точката C не преминава никое от по-рано построените ребра на H, както и никое ребро на G освен e.

Някои от по-рано построените ребра на H може да имат за край върха A. Възможно е те да разделят областта U на подобласти $U_1, U_2, \ldots, U_k$. (Ако през A все още няма прекарани ребра от H, то $k = 1$ и $U_1 = U$.) Точката C е от контура на някоя подобласт, например U_j. Ако точката A принадлежи на контура на U_j, то (тъй като областта U_j е свързана фигура), можем да свържем A и C с несамопресичаща се линия, чиито други точки са вътрешни за U_j.

Може ли да се случи така, че да не можем да свържем A и C с линия от описания вид (т.е. точката A да не принадлежи на контура на областта U_j)? Това означава, че в U съществува затворена линия, съставена от точките на някакви ребра (инак щяхме да можем да я пресечем), която съдържа във вътрешността си точката A, а точката C остава отвън.

Въпросната разделителна линия е съставена изцяло от точки от вътрешността на U, което е едно от лицата на G, затова тя не съдържа върхове на G и точки от ребрата на G. Разделителната линия не съдържа и върхове на H, тъй като единственият връх на H в U е върхът A, а той лежи във вътрешността на разделителната линия. Следователно всички нейни точки са от ребрата на H. Ако всички точки са от едно и също ребро на H, това ребро се самопресича. Ако пък точките на разделителната линия са от различни ребра на H, то някои от тези ребра се пресичат. И в двата случая се стига до противоречие с второто предположение.

Има и друг вариант: разделителната линия да е отворена, тоест да има два края. Но за да може тя да отделя A от C, трябва двата ѝ края да са точки от контура на U. Или пък да е затворена, но да има точка от контура на U. Ще разгледаме тези два случая заедно (вторият случай се свежда до първия, ако смятаме, че двата края съвпадат). Доказва се (както по-горе), че останалите точки на разделителната линия принадлежат на по-рано построени ребра на H и не са върхове на G и H. Ако вътрешните ѝ точки са от различни ребра на H, то някои от тези ребра се пресичат, което противоречи на второто предположение. Ако всичките ѝ вътрешни точки са от едно ребро на H, то двата ѝ края също са от това ребро, но едновременно са от контура на U. Има три случая:

— Ако някой от краищата на разделителната линия е връх на G, възниква противоречие с първото предположение: оказва се, че ребро от H минава през връх от G.

— Остава възможността двата края на разделителната линия да са вътрешни точки от ребра на G. Ако са от различни ребра на G, пак се стига до противоречие с първото предположение: сега едно ребро от H пресича две ребра от G.

— Ако краищата на разделителната линия са вътрешни точки от едно и също ребро на G (и от едно и също ребро на H), то стигаме до противоречие с първото предположение: едно ребро на H пресича два пъти едно и също ребро на G, ако краищата на разделителната линия са различни точки (т.е. ако тя е отворена). Ако пък тя е затворена (т.е. краищата ѝ съвпадат), то реброто от H се самопресича и има противоречие с второто предположение.

И така, направеното допускане — че не можем да свържем точките A и C — води до противоречие във всички случаи. Следователно то е невярно. Вярно е обратното: можем да свържем A и C с несамопресичаща се линия, чиито други точки са вътрешни за U_j, следователно не са върхове на G и H, нито са точки от ребрата на G, нито са точки от по-рано построени ребра на H.

Аналогично можем да свържем B и C с несамопресичаща се линия, чиито други точки са вътрешни за V, следователно не са върхове на G и H, нито са точки от ребрата на G, нито са точки от по-рано построени ребра на H.

Като обединим линиите $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ и $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$, получаваме линията $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, която представлява реброто на H, свързващо върховете A и B. То не минава през върхове на G и H, не пресича по-рано построени ребра на H, пресича само едно ребро на G — реброто e (и то в една точка, а именно C). Новото ребро $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ не се самопресича, защото $\overset{\frown}{\mathrm{AC}}$ и $\overset{\frown}{\mathrm{CB}}$ нито се самопресичат, нито се пресичат взаимно, понеже лежат в U и V, а пък $U \cap V = \varnothing$. Тоест след построяване на новото ребро на H двете предположения отново са в сила.

В крайна сметка доказани ли са двете предположения? Може би горните разсъждения изглеждат като кръгово доказателство. Всъщност доказателството е индуктивно.

Индуктивна стъпка: Ако двете предположения са изпълнени преди построяването на поредното ребро от H, то те остават в сила и след построяването на новото ребро. Това беше доказано подробно с разсъжденията от предишната страница.

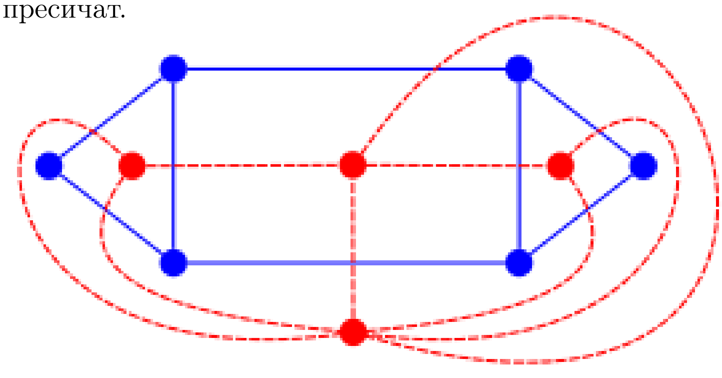
База: Отначало, когато още не е построено нито едно ребро от H, предположенията са изпълнени тривиално: твърдят всеобщност на свойства за елементите на празно множество.

С това е доказана истинността на двете предположения. Тъй като са в сила на всеки етап от построението, те ще бъдат в сила и тогава, когато построението бъде завършено. Тогава изразът "всяко от дотук построените ребра на H" ще се отнася за всички ребра на H, от което следва, че H е построен без пресичане на ребрата, т.е. H е планарен мултиграф.

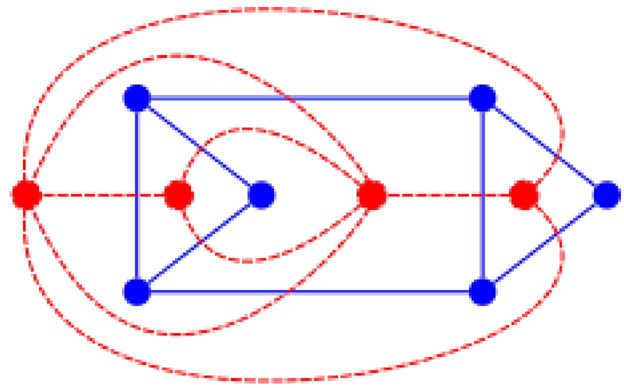
Горното разсъждение е една от разновидностите на математическата индукция. Класическият вариант се отнася за безброй стъпки, а тази разновидност — за краен брой. Тя има важно значение за теорията на алгоритмите, където служи за доказване на тяхната коректност. По-горе направихме именно това — алгоритъм за влагане на H в равнина. Ребрата на H се строят едно по едно чрез цикъл, а конюнкцията от двете предположения (която е в сила след всяка итерация) се нарича *инварианта на цикъла.*

Описанието на алгоритъма не е изцяло формално. По-точно, съществуването на линията, свързваща точките A и C, е доказано неконструктивно — чрез позоваване на едно свойство на свързаните фигури. В общия случай (когато лицата са произволни фигури) е трудно да се опише в явен вид построяването на линията. В частния случай, когато лицата U и V са изпъкнали фигури, общото им ребро e е права линия и построението се описва лесно: взимаме произволна точка C, вътрешна за e, и я свързваме чрез отсечки с точките A и B. Начупената линия ACB е новото ребро на мултиграфа H. Не е трудно да се убедим, че така построените ребра на H не се пресичат.

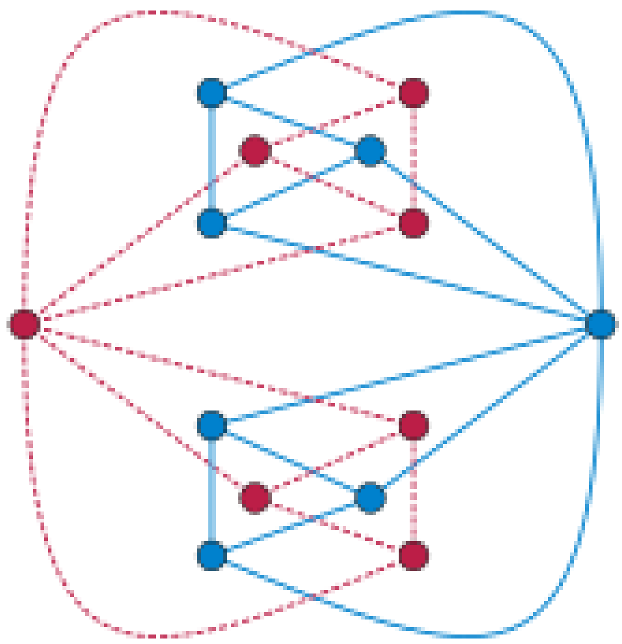
в) Нека G е мултиграфът, изобразен с плътни сини линии. Показани са две влагания на G в равнината. Дуалните мултиграфи H_1 и H_2 са изобразени с червен пунктир. H_1 и H_2 не са изоморфни, защото единият има връх от шеста степен, а другият няма такъв връх.



Както показва този пример, дуалният мултиграф зависи също от конкретното влагане в равнина на дадения планарен мултиграф.



г) Пример за автодуален мултиграф е показан на чертежа вдясно.



д) Нека да допуснем противното: има краен планарен мултиграф G с несвързан дуален мултиграф H. Следователно има два върха на H, между които няма път, съставен от ребра на H. Между съответните две лица на G също няма път, т.е. редица от лица. Всяка редица от лица на G може да бъде описана чрез линия, минаваща през лицата и общите им ребра. Обратно: всяка равнинна линия, която не минава през връх на G, поражда редица от лица на G — лицата, през които преминава. Това съответствие между редиците от лица и линиите от равнината на G не е биекция, но е достатъчно за нашите цели. То означава, че има две точки — произволно избрани две точки, по една от всяко от споменатите по-горе две лица на G, — които не могат да бъдат свързани чрез равнинна линия, неминаваща през върховете на G. Тоест равнината, от която са премахнати върховете на G, е несвързана, което е невъзможно: както и да махнем от равнината краен брой точки, остатъкът е свързан. Това противоречие показва, че допускането за несвързаност на H не е вярно, т.е. H е свързан.

е) Нека G е произволен планарен мултиграф, а H е дуалният мултиграф на G.

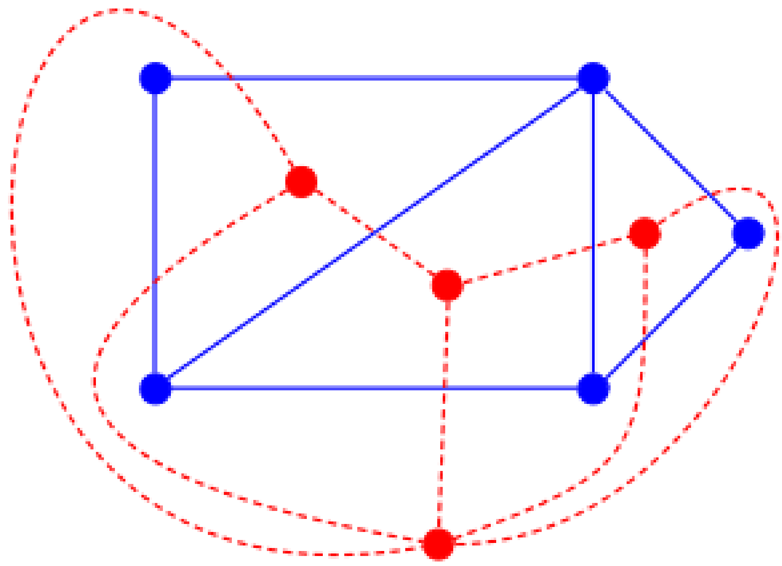
— Биекция между лицата на G и върховете на H е зададена в самото определение на понятието "дуален мултиграф".

— Биекция между ребрата на G и ребрата на H строим по идеята от подточка "б". Нека e е произволно ребро на G. То определя двойка лица U и V на G — лицата, които се намират от двете му страни. На лицата U и V по определение съответстват два върха A и B от графа H, между които има ребро f. (Може да се случи $U = V$. Това не е пречка. Тогава $A = B$ и f е примка.) На реброто e от G съпоставяме реброто f от H. Това изображение е биекция.

Действително, всяко ребро f от H има единствен първообраз — ребро e от G. А именно, ако A и B са краищата на f, то двата върха A и B от H съответстват на две лица U и V от G с общо ребро e. (Може $A = B$. Тогава $U = V$ е лице на G, което се намира от двете страни на някое ребро e.) Това ребро e е първообразът на f.

Възможно е две лица U и V от G да имат няколко общи ребра $e_1, e_2, \ldots, e_k$. На U и V съответстват два върха A и B от H, между които има същия брой k ребра $f_1, f_2, \ldots, f_k$. И обратно: всички кратни ребра от мултиграфа H имат за първообрази двойка лица с няколко общи ребра. Щом са еднакъв брой, е лесно да установим биекция: номерираме ги по произволен начин и съпоставяме ребрата с еднакъв номер, тоест f_1 — на e_1, f_2 — на e_2, $\ldots$, f_k — на e_k. (Може $U = V$. По-точно, $U = V \Longleftrightarrow A = B$: едно лице се намира от двете страни на k ребра от G $\Longleftrightarrow$ през съответния връх на H има k-кратна примка.)

— Нека планарният мултиграф G е свързан. Тогава има биекция между върховете на G и лицата на дуалния мултиграф H. Биекцията може да зависи от конкретния начин, по който G и H са вложени в равнината, затова ще смятаме, че H е построен по начина, описан в подточка "б".



Примерен мултиграф G е изобразен на чертежа чрез плътни сини линии, а пък неговият дуален мултиграф H е показан с червен пунктир.

По построение всеки от върховете на H е вътрешна точка за съответното лице на G. Затова никой връх на H не е връх на G. Тогава никой връх на G не е връх на H. Освен това никое от ребрата на H не съдържа връх на G (пак по построение: подточка "б", предположение № 1). Следователно никой връх на G не лежи на ребро от H. Дотук доказахме, че върховете на G нито са върхове на H, нито лежат на ребра от H. Оттук следва, че всеки връх на G лежи в някое лице на H. Нещо повече, всеки връх на G лежи в единствено лице на H, защото по определение различните лица нямат общи точки.

На всеки връх на G съпоставяме единственото лице на H, което съдържа този връх. Разсъжденията от предишния абзац показват, че това съответствие е добре дефинирано. Остава да проверим, че то е биекция.

Най-напред ще докажем, че всяко лице на H съдържа поне един връх на G. В случай че мултиграфът H има само едно лице, то съдържа всички върхове на G, следователно поне един връх на G (предполагаме, че мултиграфът G има поне един връх; в теорията на графите обикновено не се разглеждат графи и мултиграфи без върхове). Ако H има две или повече лица, да изберем кое да е от тях. Избраното лице е отделено от другите лица на H чрез контур, съставен от върхове и ребра на H (възможно е контурът да се състои от един връх и едно ребро, тоест той може да бъде примка). По построение всяко ребро на H пресича точно едно ребро на G (предположение № 1 от подточка "б"). Контурът съдържа поне едно ребро от H, следователно той пресича поне едно ребро e от G. По построение реброто e не може да пресича контура втори път, затова единият му край е вътрешен, а другият — външен за контура. Следователно избраното лице на H съдържа единия край на e, тоест съдържа връх от G.

Дотук доказахме, че всяко лице на H съдържа поне един връх от G. Ето защо върховете на G са поне колкото лицата на H. Ако докажем, че са равен брой, ще следва, че всяко лице на H съдържа точно един връх от G, тоест съответствието е биекция.

Нека n_1, m_1 и f_1 са съответно броят на върховете, ребрата и лицата на G, а пък n_2, m_2 и f_2 са съответно броят на върховете, ребрата и лицата на H. Понеже всеки от мултиграфите G и H е свързан и планарен, то за тях важи формулата на Ойлер:

$$n_1 - m_1 + f_1 = 2 \qquad \text{и} \qquad n_2 - m_2 + f_2 = 2\,.$$

Следователно

$$n_1 - m_1 + f_1 = n_2 - m_2 + f_2\,.$$

Понеже има биекция между лицата на G и върховете на H, то следва, че $f_1 = n_2$. А от биекцията между ребрата на G и ребрата на H следва, че $m_1 = m_2$. Ето защо можем да унищожим f_1 и n_2, а също така m_1 и m_2:

$$n_1 - \cancel{m_1} + \cancel{f_1} = \cancel{n_2} - \cancel{m_2} + f_2\,.$$

Остава

$$n_1 = f_2\,,$$

което трябваше да се докаже.

И така, ако планарният мултиграф G е свързан, то съществува биекция между върховете на G и лицата на дуалния мултиграф H. Но ако G не е свързан, тогава може да няма такава биекция. Ако G се състои например от два триъгълника, несвързани един с друг, то G има шест върха, а дуалният мултиграф H има пет лица. Понеже $6 \neq 5$, то няма биекция.

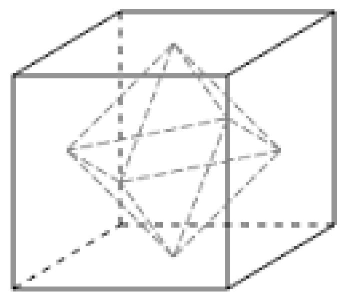
— Нека G е планарен мултиграф, а H е неговият дуален мултиграф. От подточка "б" знаем, че H също е планарен. Следователно H на свой ред има дуален мултиграф. В задачата се иска доказателство на следната еквивалентност:

$$G \text{ е свързан} \iff \text{дуалният мултиграф на } H \text{ е изоморфен на } G.$$

Необходимост: Нека G е свързан. По-горе построихме биекция между върховете на G и лицата на H, както и биекция между ребрата на G и ребрата на H. От тези две биекции следва, че G изпълнява всички изисквания от определението, за да може да бъде смятан за дуален мултиграф на H.

Достатъчност: Ако G е дуален мултиграф на H, то G е свързан според подточка "д".

Забележка: На всеки изпъкнал многостен може да се съпостави планарен граф. Ето защо понятието "дуални графи" естествено поражда съответното понятие "дуални многостени". Например кубът и правилният октаедър са дуални многостени. Върховете на октаедъра са центровете на стените на куба. Стените на октаедъра съответстват на върховете на куба: във всеки връх на куба се събират по три негови стени, а техните центрове са върховете на една стена на октаедъра. Ръбовете на октаедъра съответстват на ръбовете на куба: два върха на октаедъра са свързани с ръб точно когато съответните им стени на куба имат общ ръб.



В задача 3 са използвани чертежи от *Уикипедия*.