Изпит по "Дискретни структури" (СУ, ФМИ, 07. 02. 2019 г.) — задачи за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток

Втора част

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	4	5	6	*Общо за 2. част*
точки				
от макс.	*20*	*20*	*20*	*60*

Всяка от двете части на изпита съдържа по три задачи и всяка задача носи най-много 20 точки.

За отлична оценка са достатъчни общо 100 точки. Ако имате над 100 точки, това е бонус за Вас.

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно!

Задача 4. В краен неориентиран граф без примки е избран неизолиран връх v_0. Известно е, че има единствен най-дълъг прост път с начало v_0. Докажете, че краят му $\big($различен от $v_0\big)$ е връх от нечетна степен.

Задача 5. Нека A е непразно множество и $\mathcal{T} = \{B \,|\, B \subseteq A \times A\}$. Дефинираме три предиката P_1, P_2 и P_3 над множеството $\mathcal{T}$:

- $\forall x \in \mathcal{T} : P_1(x)$ тогава и само тогава, когато $(\forall y \in A : (y, y) \in x)$.
- $\forall x \in \mathcal{T} : P_2(x)$ тогава и само тогава, когато $(\forall y \in A, \forall z \in A : (y, z) \in x \leftrightarrow (z, y) \in x)$.
- $\forall x \in \mathcal{T} : P_3(x)$ тогава и само тогава, когато
$$(\forall y \in A, \forall w \in A, \forall z \in A : (y, w) \in x \land (w, z) \in x \rightarrow (y, z) \in x).$$

Професор Парадоксов твърди, че

$$\forall x \in \mathcal{T} : P_2(x) \land P_3(x) \rightarrow P_1(x),$$

и предлага следното доказателство.

> Разглеждаме произволно $x \in \mathcal{T}$. Приемаме, че $P_2(x)$ и $P_3(x)$. Ще докажем, че $P_1(x)$. Разглеждаме произволно $a \in A$, такова че $(a, b) \in x$. Щом $P_2(x)$, то $(b, a) \in x$. Тогава $(a, b) \in x$ и $(b, a) \in x$. Тъй като $P_3(x)$, то от $(a, b) \in x$ и $(b, a) \in x$ следва, че $(a, a) \in x$.
>
> Тъй като разгледаното a е произволно, то този извод важи за всяко a от A. Но това е същото като $\forall y \in A : (y, y) \in x$. Тогава $P_1(x)$ е истина за всяко $x \in \mathcal{T}$.

Прав ли е професорът? Валидно ли е доказателството му?

Задача 6. Дадена е булевата функция $f(x, y) \equiv (x \lor y) \rightarrow (x \land y)$.

а) Намерете съвършената дизюнктивна нормална форма на f. **(6 точки)**

б) Намерете полинома на Жегалкин на функцията f. **(7 точки)**

в) Множеството от булеви функции $\{\, f\,, \lor\,, \land \,\}$ пълно ли е? **(7 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 4. Най-дългият прост път с начало v_0 изглежда така:

$$v_0 \;\text{———}\; v_1 \;\text{———}\; v_2 \;\text{———}\; v_3 \;\text{———}\; \ldots \;\text{———}\; v_{k-1} \;\text{———}\; v_k\,,$$

където k е дължината, v_0 е началото, v_k е краят на пътя.

Щом v_0 е неизолиран връх, то $k \geq 1$ и краят v_k е различен от v_0. Затова краят v_k има предходен връх v_{k-1} $\big($който може да съвпада с $v_0\big)$. Тогава степента на v_k е поне единица.

Да допуснем, че степента на v_k е по-голяма от единица, т.е. v_k е свързан с поне един връх, различен от v_{k-1} (а също и от v_k, защото графът няма примки). Има две възможности:

1) Върхът v_k е свързан с някой връх v_i, който е от същия път, но е различен от v_{k-1} (т.е. i е някой от индексите $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-2$). Можем да получим друг най-дълъг път, като вземем реброто $v_i\, v_k$ вместо $v_i\, v_{i+1}$:

$$v_0 \;\text{———}\; \ldots \;\text{———}\; v_{i-1} \;\text{———}\; v_i \;\text{———}\; v_k \;\text{———}\; v_{k-1} \;\text{———}\; \ldots \;\text{———}\; v_{i+1}\,.$$

Полученият път е прост (върховете му са различни), започва от v_0 и има същата дължина k. Тоест това е втори най-дълъг прост път с начало v_0, а по условие има само един такъв.

2) Върхът v_k е свързан с някой връх u, различен от $v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{k-1}$ и v_k. Тогава

$$v_0 \;\text{———}\; v_1 \;\text{———}\; v_2 \;\text{———}\; v_3 \;\text{———}\; \ldots \;\text{———}\; v_{k-1} \;\text{———}\; v_k \;\text{———}\; u$$

е прост път с начало v_0 и дължина $k+1$, което противоречи на избора на k (получава се прост път, по-дълъг от най-дългия прост път).

И в двата случая се стига до противоречие. Следователно допускането не е вярно, тоест степента на v_k не е по-голяма от единица. Тогава степента на v_k е равна на единица, затова v_k е връх от нечетна степен (единицата е нечетно число).

Задача 4 може да се реши по още един начин — чрез позоваване на теорема от домашно № 4: има четен брой най-дълги прости пътища с начало даден връх v_0 и с краен връх от четна степен. По условие има само един най-дълъг прост път с начало v_0. Тогава споменатият четен брой най-дълги прости пътища може да бъде само нула. Тоест единственият най-дълъг прост път с начало v_0 не завършва във връх от четна степен. Значи, завършва във връх от нечетна степен.

Задача 5 разглежда въпроса: ако една бинарна релация, дефинирана над декартов квадрат, е симетрична и транзитивна, следва ли, че тя е и рефлексивна? Отговорът гласи: не, не следва. Празната релация $\varnothing$ е контрапример. Грешката в доказателството на професор Парадоксов е, че се предполага съществуването на наредена двойка $(a, b) \in x$. Такава двойка може и да няма.

Задача 6. Съвършената ДНФ на f е $f(x,y) = \overline{x}\ \overline{y} \vee x\, y$, а полиномът на Жегалкин е $f(x,y) = x + y + 1$. Множеството $\big\{ f, \vee, \wedge \big\}$ е непълно: трите функции запазват единицата.