

АЛГОРИТМИ ВЪРХУ ГРАФИ

ПРИМЕРНО КОНТРОЛНО № 3 ПО “ДИЗАЙН И АНАЛИЗ НА АЛГОРИТМИ” — СУ, ФМИ (ЗА СПЕЦИАЛНОСТ “КОМПЮТЪРНИ НАУКИ”, 1. ПОТОК, ФЕВРУАРИ – ЮНИ 2019 Г.)

Забележка: За всяка задача моделирайте входните данни чрез граф. Обяснете какво са върховете и ребрата на графа в конкретната задача. Ако графът е ориентиран или тегловен, обяснете какво означават посоките, съответно теглата на ребрата в конкретната задача. За всяка задача използвайте наготово някой от изучените алгоритми. Уточнете името на използвания алгоритъм, а ако той се реализира чрез някоя от алгоритмичните схеми “търсене в ширина” и “търсене в дълбочина”, тогава уточнете и името на схемата. Илюстрирайте решението на всяка задача с подходящо избрани входни данни.

Задача 1. Известният математик Пал Ердьош е имал множество научни публикации. Обичал е съвместната работа, затова често е писал в съавторство с други математици. По този повод приятелите му измислят шеговитото понятие *число на Ердьош*. Самият Ердьош има число 0. Всеки негов съавтор получава число на Ердьош 1. Всеки, който не е бил съавтор на Ердьош, но има за съавтор човек с число на Ердьош 1, получава число на Ердьош 2. И тъй нататък.

Съставете алгоритъм, който за произволен математик намира неговото число на Ердьош. Приемат се само алгоритми с линейна времева сложност в най-лошия случай. **(25 точки)**

Задача 2. Една невронна мрежа се състои от много възли, свързани по определен начин. Всяка връзка провежда сигнал едноточно. Всеки възел, който получи сигнал по някой от входните канали, разпространява сигнала по изходните канали (и може да го промени по някакво правило).

Съставете алгоритъм с линейна времева сложност, който по дадена невронна мрежа разпознава дали в нея е възможно да се създаде незатихващ сигнал. **(25 точки)**

Задача 3. Съставете възможно най-бърз алгоритъм, който по даден неориентиран тегловен граф $G(V, E, w)$ и дадено множество от ребра $E' \subseteq E$ построява минимално покриващо дърво, съдържащо всички ребра от E' . Предполага се, че E' не съдържа цикъл. **(50 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Входът представлява неориентиран граф: върховете на графа са математиците, а ребрата свързват съавторите. Числото на Ердьош за произволен математик X е дължината на *най-къс път* от върха “Ердьош” до върха X . Графът е нетегловен, т.е. дължината на пътя се измерва с броя на неговите ребра. Най-бърз е алгоритъмът, използващ *търсене в ширина*. Той решава задачата за линейно време.

Задача 2. Входът е ориентиран граф: върхове са възлите на невронната мрежа; ребра са връзките между възлите, т.е. комуникационните канали. Графът е ориентиран, тъй като всеки канал предава сигналите едностранно. Посоката на всяко ребро на графа съответства на посоката на предаване на сигналите по съответния комуникационен канал.

В една невронна мрежа може да се създаде незатихващ сигнал тогава и само тогава, когато графът съдържа *ориентиран цикъл*. Най-бързият алгоритъм за откриване на цикли решава задачата за линейно време с помощта на *търсене в дълбочина*.

Задача 3 може да бъде решена чрез промяна на *алгоритъма на Крускал*: в новия вариант алгоритъмът започва с ребрата от множеството E' , без да се интересува от техните тегла и без да проверява дали те образуват цикъл (по условие множеството E' не съдържа цикъл). След това алгоритъмът продължава по обичайния начин до получаването на дърво.

Друга възможност е да променим графа (т.е. входните данни), а не алгоритъма. Тъй като ребрата от множеството E' трябва непременно да бъдат част от дървото, то алгоритъмът трябва да започне от тях. Понеже алгоритъмът на Крускал започва от най-леките ребра, достатъчно е да присвоим на ребрата от E' някакво тегло, по-малко от теглата на всички други ребра. Намирането на минималното тегло става с едно обхождане на графа, което изисква линейно време, следователно не забавя съществено алгоритъма.