Изпит по Дискретни структури, 15.02.2019г.

Име: ________________________________, ФН:_____, Група:_______

Задача	1	2	3	4	5	Общо
получени точки						
максимум точки	5	6	5	6	8	30

Задача 1. Редицата $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ е дефинирана с рекурентното уравнение:

$a_0 = 0$

$a_n = a_{n-1} + n2^n$ за $n > 0$

Решете уравненето и намерете формула за a_n.

Задача 2. Даден е неориентирания граф $G(V, E)$.

Ребрата са боядисани в два цвята – син и червен, като от всеки връх излиза най-много едно синьо и най-много едно червено ребро.

Сините ребра са повече от червените.

Докажете, че в G има път със следните свойства:

(1) От крайните върхове на пътя излиза точно по едно ребро.

(2) Крайните ребра в пътя са сини.

Задача 3. Колко са двойките от вида (k_1, k_2), където k_1, k_2 и n са естествени числа, при ограничения $0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$?

Задача 4. В магистърска програма X има 17 студенти, а в магистърска програма Y - 12 студенти. Всеки от тях трябва да избере и посещава точно един от общо 10 избираеми курса. По колко начина студентите могат да направят своя избор, ако:

(а - 2 точки) няма никакви ограничения при избора;

(б - 2 точки) няма курс, избран от всеки студент от програма Y;

(в - 2 точки) всеки курс е избран от поне един студент;

Задача 5. Намерете минимална дизюнктивна нормална форма и полинома на Жегалкин на булевата функция $f(x, y, z)$, определена с редицата стойности $f = (10111010)$.

Решения

Задача 2. Разглеждаме свързаните компоненти на графа.

Тъй като от всеки връх излизат най-много 2 ребра, тези компоненти са цикли, прости пътища или изолирани върхове.

Изолираните върхове не са интересни.

Циклите се състоят от редуващи се сини и червени ребра. За да няма съседни едноцветни ребра, трябва циклите да са с четен брой ребра. Следователно броят на червените и сини ребра във всички цикли е еднакъв.

Остават простите пътища, те също се състоят от редуващи се сини и червени ребра. Ако единия край на път е червен, броят на червените ребра е равен на сините (при друг син край) или по-голям (при друг червен край).

След като общия брой на сините ребра е по-голям от червените, нужно е да има поне една компонента с повече сини ребра. Единствената възможност е прост път с два сини края.

Задача 4. В магистърска програма X има 17 студенти, а в магистърска програма Y - 12 студенти. Всеки от тях трябва да избере и посещава точно един от общо 10 избираеми курса. По колко начина студентите могат да направят своя избор, ако:

а) няма никакви ограничения при избора; 10^{29}

б) няма курс, избран от всеки студент от програма Y; $10^{17}(10^{12} - 10)$

в) всеки курс е избран от поне един студент; $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}(-1)^i(10-i)^{29}$ (принцип на включване и изключване)