Изпит: задачи за домашно. ① **Ламбда смятане**

динамично типизирани = тип свързан със стойност на промл.
статично типизирани - тип свързан с името на пром.

Формални системи от типове.
1) Мн-ва
2) д-ва
3) модели
4) изчислимост

От некоректна спецификация може да се появи некоректна програма. Бъг в спецификацията.

Предварителни сведения

Деф.: Изчислимост: f изчислима, ако $\exists M$ маш. на Тюринг, която всеки път когато зап. работа в/у лента, на която е зап. x (в дв вид) приключва

$$\ldots 0 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 1 \,|\, 1 \,|\, 0 \,|\, 0 \ldots$$

работа и зап. в/у лентата числото $f(x)$

На $\forall$ МТ съотв. число.

m е "код" на M $\{m\} = M$; ~~$\ulcorner f \urcorner$~~ $\ulcorner f \urcorner$ код на изч. ф-я
най-малкото m, така че $\{m\}$ пресм. f.

Частична функция: $G_f \subseteq \mathbb{N}^2$, $\forall x_{\in \mathbb{N}} \forall y_{1 \in \mathbb{N}} \forall y_{2 \in \mathbb{N}}$ $\left.\begin{matrix}(x, y_1) \in G_f \\ (x, y_2) \in G_f\end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 = y_2$

Не е задълж. да $\exists$.

Ако $(x, y) \in G_f$, бележим $f(x) \simeq y$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ частична ф-я

Ако $\nexists y : (x, y) \in G_f$, бележим $\neg ! f(x)$

$\exists y : (x, y) \in G_f$, бележим $! f(x)$

Изчислимост на частична ф-я:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. f изч., ако $\exists$ МТ M, така че:

$\forall x$ 1) $! f(x)$, то M в/у лента с x, ~~зав~~ $f(x) \simeq y$

2) $\neg ! f(x)$, то M в/у лента с x не зав.

Метод на диагонализацията.

промена

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3 & 7 & \dots & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 3 & 9 & 1 & 0 & \dots & \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ нова матрица с различни елементи

$\Rightarrow$ ~~не можем~~ получаваме ново ни-во от числа, които не сме броили до сега.

1) Пълна функция: $\exists G_f \subseteq \mathbb{N}^2 : \forall x, \forall y_1, \forall y_2$

$$\left.\begin{matrix} f(x) = y_1 \\ f(x) = y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 \equiv y_2$$

Изчислимост на пълна функция:

f изчислима, ако $\exists M$ МТ, за което при подадено ~~$\forall x : f(x)$~~ $\forall x$ записва резултата на $f(x)$ в/у лентата

2) Частична функция: $G_f \subseteq \mathbb{N}^2 : \forall x, \forall y_1, \forall y_2$

$$\left.\begin{matrix} f(x) = y_1 \\ f(x) = y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_1 \equiv y_2$$

$$(x, y) \in G_f \Rightarrow f(x) \simeq y; \; !f(x)$$

$$f : X \rightharpoonup Y$$

$$(x, y) \notin G_f \Rightarrow \neg ! f(x)$$

Изчислимост на частична ф-я:

f изчислима, ако $\exists M$ МТ:

1) $!f(x)$, то M зап. в/у лента $f(x) \simeq y$

2) $\neg ! f(x)$, то M не завършва

V - изброим набор от синт. пром., означени с малки лат. букви: $x, y, \dots$

def.

λ-термове Λ:

1) $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$ (променлива)

2) $M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$ (апликация: прилагане на терма M към терма N)

3) $x \in V$ и $M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda_x M) \in \Lambda$ (абстракция: построяване на ф-я с арг. x и тяло M)

def. (свободни променливи)

$M \in \Lambda$; $FV(M) \subseteq V$ мн-во от свободни пром. на M:

1) $FV(x) := \{x\}$

2) $FV(M_1 M_2) := FV(M_1) \cup FV(M_2)$

3) $FV(\lambda_x N) := \cancel{FV(N)}\ FV(N) \setminus \{x\}$

def. (затворени термове, комбинатори)

$M \in \Lambda$ комбинатор, ако $FV(M) = \emptyset$

def. (свързани променливи)

$M \in \Lambda$; $BV(M) \subseteq V$ мн-во от свързани пром. на M:

1) $BV(x) := \emptyset$

2) $BV(M_1 M_2) := BV(M_1) \cup BV(M_2)$

3) $BV(\lambda_x N) := BV(N) \cup \{x\}$

def. (субституция)

$M, N \in \Lambda$, $x \in V$; $M[x \mapsto N]$ субституция на x с N в M:

1) $x[x \mapsto N] := N$

2) $y[x \mapsto N] := y$: $y \not\equiv x$

3) $(M_1 M_2)[x \mapsto N] := (M_1[x \mapsto N])(M_2[x \mapsto N])$

4) $(\lambda_x P)[x \mapsto N] := \lambda_x P$

5) $(\lambda_y P)[x \mapsto N] := \lambda_y (P[x \mapsto N])$: $y \not\equiv x$, $x \notin P$ или $y \notin FV(N)$

зад. 1: (преименуване на свързана променлива)

$M \in \Lambda$, $x \in BV(M)$

$y \notin FV(M) \cup BV(M)$; M^x_y рез. от замяна $\forall$ св. ср. на x с y

~~$x^x_y :\equiv y$ $BV(x) := \emptyset \Rightarrow$~~

1) ~~$x^x_y := x$~~ $[x]^x_y := y$

2) ~~$M^x_y := y$~~ ~~M^x_y~~ $= [y]^x_y := y$

3) $(M_1 M_2)^x_y := M_1{}^x_y M_2{}^x_y$

4) $\lambda_x P^x_y := \lambda_y P^x_y$

5) $\lambda_y P^x_y := \lambda_y P$?

def. (вариант)

$M^x_y \equiv N$; $x, y \in N$

$\overset{\alpha}{=}$: рел. еквив. в сила само за термове, които се различават единствено синтакт. по имената на променливите си:

1) $M \overset{\alpha}{=} M$

2) $M^x_y \equiv N$ за някои $x, y \in V \Rightarrow M \overset{\alpha}{=} N$

3) $M \overset{\alpha}{=} N \Rightarrow N \overset{\alpha}{=} M$

4) $M \overset{\alpha}{=} N$, $N \overset{\alpha}{=} P \Rightarrow M \overset{\alpha}{=} P$

th.

$M \in \Lambda$ $\exists M' \overset{\alpha}{=} M$: $BV(N) \cap FV(M) = \emptyset$ (не е ли M'?)

зад. 2: $x \in V$ и $N \in \Lambda$, да се покаже че:

1) $\forall M \in \Lambda$, $\exists M' \overset{\alpha}{=} M$: $M'[x \mapsto N]$ е дефинирана

2) Ако $M \overset{\alpha}{=} M' \in \Lambda$, $N \overset{\alpha}{=} N' \in \Lambda$ и $M[x \mapsto N]$ и $M'[x \mapsto N']$ са дефинирани едновременно, то $M[x \mapsto N] \overset{\alpha}{=} M'[x \mapsto N']$

(операцията субституция може да се разглежда като тотална с точност до $\overset{\alpha}{=}$)

① $M' \overset{\alpha}{=} M \Rightarrow$ ~~$\lambda x[M']$ е заменен.~~

Всеки терм $\lambda x[A]$ в M' е заменен с

$\lambda y[A[x \mapsto y]]$

начало ③

def. (преим. св. пром.)

1) $x[x \mapsto y] := y$

2) $y[x \mapsto y] := y$

3) $(M_1 M_2)[x \mapsto y] := (M_1[x \mapsto y])(M_2[x \mapsto y])$

4) $(\lambda_x P)[x \mapsto y] := \lambda_y P^x_y$

5) $(\lambda_y P)[x \mapsto y] := \lambda_y P \quad y \neq x$

M' произв.

$\forall M \; \exists M' \overset{\alpha}{=} M \Rightarrow$

Структурна индукция

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

1) $0 \in \mathbb{N}$

2) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

св-во:

Ако $X \subseteq \mathbb{R}$ удовл. 1) и 2), то със сигурност $\mathbb{N} \subseteq X$, т.е. $\mathbb{N}$ е най-малкото такова мн-во

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

ММИ е следствие от деф. на $\mathbb{N}$

1) I $n=0$ $\quad \sum_{i=1}^{0} i = \frac{0.(0+1)}{2} = 0$

II Нека св-вото е вярно за някое n, да док. че е вярно за $(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + n+1 \underset{\text{ИП}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+2) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \blacksquare$$

2) Да разгл. $X \subseteq \mathbb{R}$, за които $\sum_{i=1}^{x} i = \frac{x(x+1)}{2}$

Искаме да док., че ~~$X = \mathbb{N}$~~ $\forall n \in \mathbb{N} \rightarrow n \in X$; $\mathbb{N} \subseteq X$

Набл.: X удовл. 1) и 2)

Но: $\mathbb{N}$ е най-малкото мн-во със св-вата 1) и 2), т.е. $\mathbb{N} \subseteq X$ $\blacksquare$

Нека имаме U-универсум. $2^U := \{X \subseteq U\}$.

Разглеждаме функции (оператори) $\Gamma : 2^U \to 2^U$

def. Казваме, че Γ е монот. оператор, ако запазва релацията за включване. $X, Y \subseteq U$ и $X \subseteq Y \to \Gamma(X) \subseteq \Gamma(Y)$

~~def~~ **def.** Казваме, че X е неподв. т-ка на Γ, ако $\Gamma(X) = X$

th. (Кнастер-Тарски).
Ако Γ е монотонен оператор, то Γ притежава най-малка неподвижна точка. (какво значи правилно деф. по индукция)

Пр: Γ немонотонен:

$\Gamma(X) := \{y \mid 2y \in X, y \in X\}$ $\iff$ 1) $0 \in X$

$\Gamma(\mathbb{N}) \neq \cancel{\mathbb{N}}$ 2) $2n \in X \to n \notin X$

няма най-малка неподв. т-ка

$\Gamma_1(X) := \{0\} \cup \{x+1 \mid x \in X\}$ оператор над мн-ва

$\mathbb{N}$ е н.м.н.т. на Γ_1

$\Gamma_2(X) := V \cup \{\neg P \mid P \in X\} \cup \{P \sigma Q \mid P \in V, Q \in V, \sigma \in \{\wedge, \vee\}\}$

оператор за съжд. ф-ли

F е н.м.н.т. на Γ_2

~~def.~~

obs. ~~{0}~~ Ако $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq U$, то $\exists! X : \sup\limits_{i \to \infty} X_i$

ex. $\{0\} \subseteq \{0, 2\} \subseteq \ldots \subseteq \{0, 2, \ldots, 2n\} \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{N}$

$2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\limits_{i \to \infty} \{0, 2, \ldots, 2i\}$

def. Γ е непрекъснат, ако запазва sup, т.е.

$\forall X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq U$ $\Gamma(\sup\limits_{i \to \infty} X_i) = \sup\limits_{i \to \infty} \Gamma(X_i)$

Нека Γ е непр. оп. Разгл. редицата $Y_0 := \emptyset$, $Y_{n+1} = \Gamma(Y_i)$, т.е

тв. $Y_i \subseteq Y_{i+1}$ 1) $\emptyset \subseteq Y_1$ $Y_{i+1} = \Gamma(Y_i) \subseteq \Gamma(Y_{i+1}) = Y_{i+2}$

2) $Y_i \subseteq Y_{i+1}$

$\mu\Gamma := \sup_{i\to\infty} \Gamma^i(\emptyset)$ (3) λ-смятане

тв. $\mu\Gamma$ е н.м.н.т. на Γ

ex. $Y_0 := \emptyset$

$Y_1 := \Gamma_1(\emptyset) = \{0\}$ (от Γ_1)

$Y_2 := \Gamma_1(Y_1) = \{0, 1\}$

$Y_3 := \Gamma_1(Y_2) = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

$Y_n := \Gamma_1(Y_{n-1}) = \{0, 1, 2, \dots\}$

$\mu\Gamma_1 = \mathbb{N}$

почнем празното мн-во

ex. $Y_0 := \emptyset$

$Y_1 := \Gamma_2(\emptyset) = V$

$Y_2 := \Gamma_2(Y_1) = V \cup \{(\neg A) \mid A \in V\} \cup \{A \circ B \mid A \in V, B \in V\}$

$\mu\Gamma_2 = F$

Вместо оператори:

Γ от вида $\Gamma(X) := \underbrace{C_1(X) \cup C_2(X) \cup \dots \cup C_n(X)}_{\text{клаузи}}$

$C_i(X) = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in X\}$

ex. $C_1(X) = \{0\}$

$C_2(X) = \{x+1 \mid x \in X\}$

гарантират, че операторът винаги ще е монотонен и ще има н.м.н.т.

1) базови клаузи → конст. ф-ии от вида $c \in X$ или $V \subseteq X$ факт

2) индуктивни клаузи от вида правило
ако $x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X$, то $f(x_1, \dots, x_n) \in X$ затваряне

ex. ~~Числа на Фибоначи: (Fib)~~

~~1) $0 \in Fib$~~

~~2) $1 \in Fib$~~

~~3) $a \in Fib, b \in Fib$~~

ex. повече инд. клаузи (числа на Hamming): числата, чиито пр. дел. са от $\{2, 3, 5\}$

(неинд.) $H = \{x \mid p/x, p\text{-пр.} \to p \in \{2, 3, 5\}\}$

(инд.) 1) $1 \in H$

2) $h \in H, 2h \in H, 3h \in H, 5h \in H$

hw. Док. еквив. на двете деф. (взимат се две мн-ва и да се док., че са равни)

Едновременна индукция:

Идея: разглеждане мн-ва от вид $X \times Y$.

ex. Ev - четни, Od - нечетни: $Ev \times Od \subseteq \mathbb{R}^2$

1) $0 \in Ev$
2) $1 \in Od$
3) $n \in Ev \Rightarrow n+1 \in Od$
4) $n \in Od \Rightarrow n+1 \in Ev$

$\longleftrightarrow$

~~1) $\{0\} \times \mathbb{N} \subseteq Ev\,Od$~~
~~2) $\mathbb{N} \times \{1\} \subseteq Ev\,Od$~~
1) $\{0\} \times \{1\} \subseteq Ev\,Od \rightarrow \{0, \{0, 1\}\}$
2) $\{(n+1, m+1) \in Ev\,Od\} \mid (m, n) \in Ev\,Od\}$
ч. н. четно става неч. ч. нч.

Деф. с индукция по деф. на инд. деф. мн-во: (X)

Идея: да дефинираме <u>тотална</u> функция

$$f : X \rightarrow Y$$

ex. $n!$ $f(0) = 1$
$f(n+1) = \cancel{(n+1)f(n)}\ (n+1) f(n)$

F - графика на ф-ята f:
1) $(0, 1) \in F$
2) $(n, r) \in F \rightarrow (n+1, (n+1)r) \in F$
$\quad\quad n! \quad\quad\quad\quad (n+1)!$

hw. да се док., че с инд. по <u>def.</u> се постр. графика на тотална функция.

Идея: $\mathrm{dom}\, F \subseteq X$

Деф. на ф-я над инд. деф. мн-во X използвайки неявни клаузи $\longleftrightarrow$ примитивна рекурсия

ex. (~~непримитивна~~ рекурсия) обща рекурсия

1) $GCD(x, x) = x$
2) $GCD(x, y) = GCD(x-y, y)$, $x > y$
3) $GCD(x, y) = GCD(x, y-x)$, $y > x$

$\Longleftrightarrow$

1) $(x, x, x) \in G$
2) $(x-y, y, z) \in G$, $x > y$ $\Rightarrow (x, y, z) \in G$
3) $(x, y-x, z) \in G$, $y > x$ $\Rightarrow (x, y, z) \in G$

получаване н.м.н.т. - нямаме гаранция, че е тотална

$GCD(x, 0) = ?$

---

ex. $\mathrm{depth}(A)$ за $A \in F$

$\mathrm{depth} : F \rightarrow \mathbb{N}$

1) $\mathrm{depth}(P) := 0$ $(P \in V)$
2) $\mathrm{depth}(\neg A) := 1 + \mathrm{depth}(A)$
3) $\mathrm{depth}(A \circ B) := 1 + \max(\mathrm{depth}(A), \mathrm{depth}(B))$

hw. да се провери, че във $\forall F$ има равен брой отв. и затв. <u>скоби</u>

$X = \{x \in \Sigma^* \mid \#(x,)) = \#(x, ()\}$
$F \subseteq X$

Синтаксис на λ-смятането

V е изброимо безкрайно мн-во от променливи $V = \{x, y, z, \dots\}$

$\Sigma = V \cup \{(,), \lambda\}$

def. мн-вото $\Lambda \subseteq \Sigma^*$: (мн-во от λ-термове)

1) $V \subseteq \Lambda$, т.е. $x \in V \Rightarrow x \in \Lambda$ (променлива)
2) $M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$ (апликация) „прилагане на $\overset{\text{ф-я}}{M}$ над $\overset{\text{арг.}}{N}$"
3) $x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x M) \in \Lambda$ (абстракция) „функция с парам. x и тяло M"

ex. $(\lambda x x)$ $\quad (\lambda x(\lambda y x))$ $\quad (\lambda x(\lambda y y))$ $\quad \lambda f(\lambda x(f(f(f x))))$

notation:
1) Пропускаме най-външните скоби
2) λx пишем λ_x - виз. разгр. парам. от тяло
3) $(\lambda_{x_1}(\lambda_{x_2} \dots (\lambda_{x_n} M)..))$ пишем $\lambda_{x_1, x_2, \dots, x_n} M$
4) $(M(NP)) \not\equiv ((MN)P)$
$((((M_1 M_2) M_3) \dots) M_n)$ пишем $\underset{\text{ф-я}}{M_1} \underbrace{M_2 M_3 \dots M_n}_{\text{параметри}}$
5) M и N съвп. като думи, пишем $M \equiv N$

ex. $\lambda_x x =: I$ идентитет
$\left.\begin{array}{l}\lambda_{x,y} x =: \\ \lambda_{x,y} y =: \end{array}\right\}$ проекции
$\lambda_{f,x} f(f(f x)) =: C_3$ (трето число на Чърч)

def. (свободни променливи) $FV(M)$ за $M \in \Lambda$: $FV : \Lambda \to 2^V$
1) $FV(x) = \{x\}$
2) $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$ няма проблем, когато махаме от резултата!
3) $FV(\lambda_x M) = FV(M) \setminus \{x\}$

def. (комбинатори) $M \in \Lambda$, ако $FV(M) = \emptyset$ не зависят от нищо външно def. (свързани пром.) $BV(M)$ за $M \in \Lambda$, $BV: \Lambda \to 2^V$

1) $BV(x) = \emptyset$

2) $BV(MN) = BV(M) \cup BV(N)$

3) $BV(\lambda_x M) = BV(M) \cup \{x\}$

$$(\lambda_x M)N \longmapsto M[x \longmapsto N]$$

$$M \quad x \quad N$$

def. (субституция) формално $\bullet[\bullet \mapsto \bullet]: \Lambda \times V \times \Lambda \to \Lambda$:

Деф. инд. $M[x \mapsto N]$ по M:

1) $M \equiv y$

1.1) $y \equiv x$ $\quad x[x \mapsto N] := N$

1.2) $y \not\equiv x$ $\quad y[x \mapsto N] := y$

2) $M \equiv M_1 M_2$ и $M_1[x \mapsto N]$, $M_2[x \mapsto N]$ деф.

$$(M_1 M_2)[x \mapsto N] := (M_1[x \mapsto N])(M_2[x \mapsto N])$$

3) $M \equiv \lambda_y M'$ и $M'[x \mapsto N]$ деф.

3.1) $y \equiv x$ $\quad (\lambda_x M')[x \mapsto N] := \lambda_x M'$ не пипаме св. пром.

3.2) $y \not\equiv x$ $\quad (\lambda_y M')[x \mapsto N] := \lambda_y (M'[x \mapsto N])$ ← само това

$y \notin FV(N)$

прави ф-ята не тотална

ex. $\cancel{(\lambda_y z)[z \mapsto y]}$

$\cancel{(\lambda_y y)}$

прихващане на променливи

Как ще я тотализираме?

hw. деф. заместване M^x_y на пром. x с пром. y, където M е λ-терм, $x \in BV(M)$, $y \notin FV(M) \cup BV(M)$

Нека $M, N \in \Lambda$: $BV(M) \cap FV(N) = \emptyset$

hw. $M[x \mapsto N]$ е деф.

hw. def. M' вариант на M, ако M' може да се пол. от M с пол. преим. на св. пром.

док., че $\forall M, N \in \Lambda$

$\forall x \in V$

$\exists M'$ вариант на M: $M'[x \mapsto N]$ е деф.

$M \overset{\alpha}{\equiv} M'$ $\quad M'$ вариант на M

α-еквив. релация на еквивалентност

различават се само по свързаните си променливи.

субституцията винаги е дефинирана с точност до α-еквивалентност ⟸

hw. $M' \overset{\alpha}{\equiv} M''$, $M'[x \mapsto N]$
$M''[x \mapsto N]$ деф.
$\Rightarrow M'[x \mapsto N] \overset{\alpha}{\equiv} M''[x \mapsto N]$

⑤ λ-смятане

от това следва, че субст. е хомоморфизъм

и да направим субституцията си тотална.

~~Конвенция~~
notation: I) можем да разглеждаме $\Lambda_{/\overset{\alpha}{\equiv}}$
вместо $\equiv$ използваме $\overset{\alpha}{\equiv}$

II) Всеки път, когато разгл. мн-во от термове, считаме че никоя от св. пром. в тези термове не съвп. с никоя от св. или свързаните пром. на др. термове.

tl;dr: считаме че св. пром. са винаги „свежи"

lem. Ако $x \notin FV(M) \Rightarrow M[x \mapsto N] \equiv M$ (субст. работи само в/у свободните пром.)

д-во: инд. по M:

1) $M \equiv y$ $\quad FV(y) = \{y\}$, $x \notin FV(y)$ $\Rightarrow x \neq y \Rightarrow y[x \mapsto N] \equiv y$

2) $M \equiv (M_1 M_2) \overset{\text{ИП}}{\Longrightarrow}$ ако $x \notin FV(M_1) \Rightarrow M_1[x \mapsto N] \equiv M_1$
ако $x \notin FV(M_2) \Rightarrow M_2[x \mapsto N] \equiv M_2$
$\Rightarrow (M_1 M_2) = (M_1[x \mapsto N])(M_2[x \mapsto N]) \underset{\text{ИП}}{\equiv} M_1 M_2$
2) FV $\quad FV(M_1 M_2) = \underset{x \notin}{FV(M_1)} \cup \underset{x \notin}{FV(M_2)}$

3) $M \equiv \lambda_y M' \overset{\text{ИП}}{\Longrightarrow} x \notin FV(M') \Rightarrow M'[x \mapsto N] \equiv M'$
3) FV $\quad FV(M) = FV(M') \setminus \{y\}$ и по конв. $y \neq x$
$\Downarrow$
$x \notin FV(M) \Rightarrow x \notin FV(M')$
$(\lambda_y M')[x \mapsto N] \underset{\text{def}\mapsto(3)}{\equiv} \lambda_y (M'[x \mapsto N]) \equiv \lambda_y M' \equiv M$ ∎

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "{[x \mapsto N]}"] \arrow[d, "{[y \mapsto P]}"'] & M_1 \arrow[d, "{[y \mapsto P]}"] \\ M_2 \arrow[r, "{[x \mapsto N[y \mapsto P]]}"'] & M_3 \end{tikzcd}$$

комутативна ли е субституцията?

Не е, ако:

1) $x[x \mapsto N] \equiv \cancel{N[y} \; y$

$y[y \mapsto P] \equiv P$

$x[y \mapsto P] \equiv x$, но $x[x \mapsto N[N \mapsto P]]$

$x[x \mapsto N] \equiv N'$ $\equiv P$

$(\lambda_x M)N \to M[x \mapsto N]$

схема: (автомат. д-во)

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "?"] \arrow[d, "\text{деф.}"'] & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "\text{и.п.}"'] & \bullet \arrow[u, "\text{деф.}"'] \end{tikzcd}$$

Лема (за субституцията):

$M, N, P \in \Lambda \quad x \not\equiv y \in V$ и $x \notin FV(P)$

$\Rightarrow M[x \mapsto N][y \mapsto P] \equiv M[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]]$

д-во: Индукция по M:

1) $M \in V$

1.1) $M \equiv x \Rightarrow x[x \mapsto N][y \mapsto P] \equiv N[y \mapsto P] \equiv x[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]] \equiv x[x \mapsto N[y \mapsto P]] \equiv N[y \mapsto P]$ ✓

1.2) $M \equiv y \Rightarrow y[x \mapsto N][y \mapsto P] \equiv P \equiv y[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]] \underset{x \notin FV(P)}{\equiv} P$ ✓

1.3) ~~$M \not\equiv x$ и $M \not\equiv y \Rightarrow$~~ ✓

$M \equiv z \not\equiv x, \not\equiv y \quad z[x \mapsto N][y \mapsto P] \equiv z \equiv z[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]] \equiv z$

2) ← никаква креативност

$M \equiv M_1 M_2 \quad (M_1 M_2)[x \mapsto N][y \mapsto P] \equiv$ ~~$(M_1[x \mapsto N][y \mapsto P]$~~ $\underset{2\ \text{деф.с.}}{\equiv} (M_1[x \mapsto N])(M_2[x \mapsto N])[y \mapsto P]$

$\equiv (M_1[x \mapsto N][y \mapsto P])(M_2[x \mapsto N][y \mapsto P])$

$\overset{\text{и.п.}}{\equiv} (M_1[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]])(M_2[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]]) \equiv$

$\equiv ((M_1[y \mapsto P])(M_2[y \mapsto P]))[x \mapsto N[y \mapsto P]] \equiv$

$\equiv (M_1 M_2)[y \mapsto P][x \mapsto N[y \mapsto P]] \equiv$ ~~$M_1 M_2$~~ $M[y \mapsto$

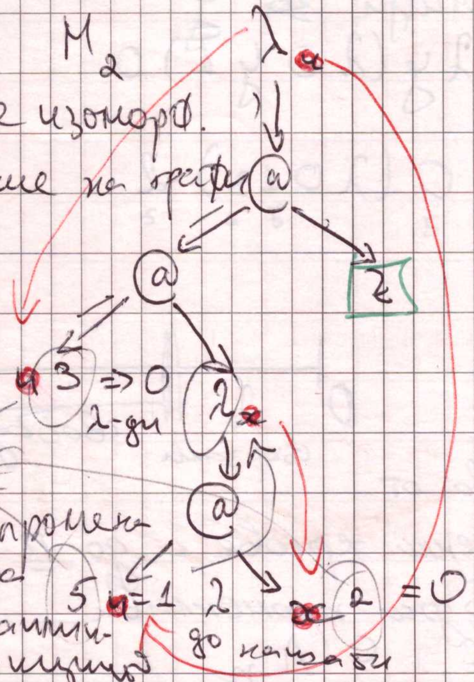
λ Представяне: (интерпретатор) ⑥ λ-смятане

$M_1 :\equiv \lambda_x x(\lambda_y xy)z$

$M_2 :\equiv \lambda_u u(\lambda_x ux)z$

$M_1 \overset{\alpha}{\equiv} M_2$

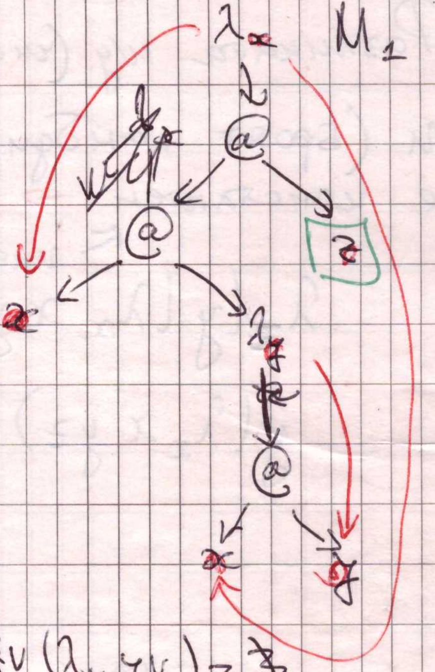
$M_2 \equiv ((M_1{}^{u}_{x})^{x}_{y})$



Свеждане изоморф. до сравнение на графи

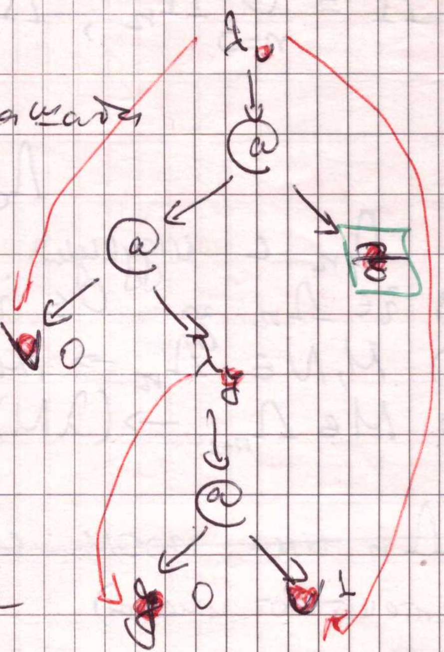
+не се влияят от промен. – не трябва да броим апликации а абстракциите

Имената на св. пром имат значение.



<изоморфни>

$M_3 :\equiv \lambda_v\{v(\lambda_y yv)z\}$



deBruijn (Де Бройн)

$M_1 :\equiv \lambda(0(\lambda 1 0)z)$ и вече $\cong$ е $\equiv$

$M_3 :\equiv \lambda(0(\lambda 0 1)z)$

$\lambda(\lambda 0)(\lambda 1) :\equiv \lambda_y(\lambda_x x)(\lambda_z y)$

$\lambda 0(\lambda 0(\lambda 2 0 1)1) :\equiv$

$:\equiv \lambda_x x(\lambda_y y(\lambda_z x z y)x)$

$M_4 :\equiv \lambda_y(\lambda_x x y z)z$

$M_4 :\equiv \lambda\, y(\lambda\, 0\, 1)\, 0$

$M_5 :\equiv \lambda_{x,y} x \equiv \lambda_x \lambda_y x$

$M_5 :\equiv \lambda 1 \overset{?}{\equiv} \lambda\lambda 1$

Справяне със свободните променливи: Искаме да ги свържем.

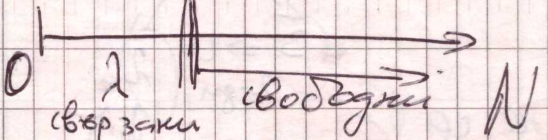
Разликата м/у (числото, с което означаваме ср. на св. пром. z) и (броят ламбди, зад които то е скрито) трябва да е константен → разбиране, че пром. е една и съща

индекс на deBruijn за y

$$\lambda_z(y(\lambda_x\, x\, y\, z)\, z) \to \lambda y(\lambda\, 0\, y\, 1)\, 0$$

$$y(\lambda_x\, x\, y\, z)\, z \rightsquigarrow \underset{y}{0}(\lambda\, 0\, \underset{y}{1}\, \underset{z}{3})\, \underset{z}{2}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} y \to \text{инд. } 0 \\ z \to \text{инд. } 2 \end{matrix}}_{\text{контекст}}$$



<u>def.</u> $\Lambda^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$; $\Lambda_n \to$ мн-во от безименни термове с до $\underline{n}$ свободни променливи

$$\Lambda_0 \subseteq \Lambda_1 \subseteq \ldots \subseteq \Lambda_n$$

деф. Λ_n с индукция по $\underline{n}$:

1) $i \in \Lambda_n$ за $0 \leq i < n$ (всички числа от 0 до $(n-1)$)
2) $M, N \in \Lambda_n \to (MN) \in \Lambda_n$
3) $M \in \Lambda_{n+1} \to (\lambda M) \in \Lambda_n$

$2 \in \Lambda_3 \subseteq \Lambda_4 \subseteq \ldots$	z
$0\, 2 \in \Lambda_3 \subseteq \Lambda_4 \subseteq \ldots$	$x\, z$
$\lambda(0\, 2) \in \Lambda_2 \subseteq \Lambda_3 \subseteq \ldots$	$\lambda_x\, x z$
$\lambda\lambda(0\, 2) \in \Lambda_1 \subseteq \Lambda_3 \subseteq \ldots$	$\lambda_y \lambda_x\, x z$
$\lambda\lambda\lambda(0\, 2) \in \Lambda_0 \subseteq \ldots$	$\lambda_z \lambda_y \lambda_x\, x z$

~~В Λ_n има пром. с номера~~

<u>def.</u> (контекст от имена)

Крайна редица от разл. променливи от V.

индекс на deBruijn

$\Gamma := x_{n-1}, \ldots, x_0$ $\quad |\Gamma| = n$ - дължина на контекста

$\mathrm{dom}\,\Gamma = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ - домейн на контекста

Идея: x_i да отг. на индекс на deBruijn i.

<u>def.</u> $X \subseteq V \Rightarrow \Lambda_X := \{M \in \Lambda \mid FV(M) \subseteq X\} \subseteq \Lambda$

... се дефинират изображения, които превеждат от ... обратно. По-точно, да се дефинира фамилия от

... с имена

... $\Lambda_{\mathrm{dom}\,\Gamma}$ и $b_\Gamma : \Lambda_{\mathrm{dom}\,\Gamma} \to \Lambda_{|\Gamma|}$ $\longrightarrow$

hw прод.: св-ва: 1) $M \in \Lambda_{dom\Gamma}$ ⑦ λ-смятане

1 $\#_\Gamma(b_\Gamma(M)) \overset{\alpha}{\equiv} M$

помни св. променливи — свързаните са други

Бележка: $M \in \Lambda \Rightarrow M \in \Lambda_{FV(M)}$

2) $M \in \Lambda_{|\Gamma|}$

$b_\Gamma(\#_\Gamma(M)) \equiv M$

+ имплементация оптионал

$M := y(\lambda_x xyz)z \qquad \Gamma := \overset{2}{z}, \overset{1}{u}, \overset{0}{y}$

$N := b_\Gamma(M) \equiv 0(\lambda 0\,1\,3)\,2$

$\#_\Gamma(N) \equiv y(\lambda_v v\, y z) z$

? $M[k \mapsto N]$ искаме да запазим индексите на св. пром. в N.

$M := \lambda 0(\lambda 0 1 3) 2 \qquad \lambda_y(y(\lambda_x xyz)z)$

$N := \lambda 0 1 \qquad (\lambda_x x u)$ индекс $u = 0$

$M[1 \mapsto N] \equiv \lambda(0((\lambda 0 1 (\lambda 0\, 3))(\lambda 0 2)))$

$\uparrow^d(M)$ да увеличава номерата ~~индексите~~ на св. пром. в M с d

пр.: $\uparrow^2(\lambda 0 1) \equiv \lambda 0 3$

$\uparrow^4(0(\lambda 0\, 1\, 3)\, 2) \equiv 4(\lambda 0\, 5\, 7)\, 6$

грешно: ~~$\uparrow^d(k) := k+d$~~

~~$\uparrow^d(MN) := (\uparrow^d(M))(\uparrow^d(N))$~~

~~$\uparrow^d(\lambda M) := \lambda(\uparrow^d(M))$ ще увеличи свързаните~~

def: $\uparrow^d_c : \Lambda_n \to \Lambda_{n+d}$ (~~грешно~~ увеличаве всички св. пром. с индекс $\geq c$ с d)

през колко λ свързани

1) $\uparrow^d_c(k) := \begin{cases} k, & 0 \leq k < c \\ k+d, & c \leq k \end{cases} \qquad \uparrow^d := \uparrow^d_0$

2) $\uparrow^d_c(MN) := (\uparrow^d_c(M))(\uparrow^d_c(N))$

3) $\uparrow^d_c(\lambda M) := \lambda(\uparrow^d_{c+1} M)$

def. Нека $M, N \in \Lambda_n$; $k \in \mathbb{N}$

$M[k \mapsto N]$ (в M зам. св. пром. с инд. k с N)

1) 1.1) $k[k \mapsto N] := N$

1.2) $i[k \mapsto N] := i$, $i \neq k$

2) $M \equiv (M_1 M_2)$ $\quad (M_1 M_2)[k \mapsto N] := (M_1[k \mapsto N])(M_2[k \mapsto N])$

3) $M \equiv (\lambda M')$

$(\lambda M')[k \mapsto N] := \lambda(M'[k+1 \mapsto \uparrow N])$:)

→ прави деф. тотална

субституцията не е вече индукция по $|\lambda|$?

hw. Док. че двете деф. за субст. са изоморфни (еквивалентни)

т.е. Нека имаме контекст $\Gamma = \cancel{x_1, \dots, x_n}\ x_{n-1}, \dots, x_0$

да се док.: 1) $M, N \in \Lambda_n \Rightarrow \#_\Gamma(M)[x_i \mapsto \#_\Gamma(N)] \overset{\alpha}{\equiv} \#_\Gamma(M[x_i \mapsto N])$

2) $M, N \in \Lambda_{dom\,\Gamma} \Rightarrow b_\Gamma(M)[x_i \mapsto b_\Gamma(N)] \equiv b_\Gamma(M[x_i \mapsto N])$

+ имплементация
optional

hint hw1:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\#_\Gamma"] \arrow[dr, phantom, "\equiv"] & \cdot \arrow[d, "b_\Gamma"] \\ & \cdot \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "b_\Gamma"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha}{\equiv}"] & \cdot \arrow[d, "\#_\Gamma"] \\ & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, bend left, "\#_\Gamma"] & \cdot \arrow[l, bend left, "b_\Gamma"] \end{tikzcd}$$

hw2:

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\#_\Gamma"] \arrow[d, "\text{субст.}"'] & \cdot \arrow[d, "\text{субст.}"] \\ \cdot \arrow[r, "\#_\Gamma"] & \cdot \ \overset{\alpha}{\equiv} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "b_\Gamma"] \arrow[d, "\text{субст.}"'] & \cdot \arrow[d, "\text{субст.}"] \\ \cdot \arrow[r, "b_\Gamma"] & \cdot \ \equiv \end{tikzcd}$$

Refl(R) = { н.м. $R' \subseteq R$, R' е рефл.

Sym(R) симетр.

Trans(R) транз.

R' е "затваряне" R (В) $(x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \in R'$

(R) $(x,x) \in R'$, $\forall x$

(S) симетр. за R'

(T) транз. за R'

отново термин н.м.н.т.

Редукции

$$(\lambda_x M)\, N \xrightarrow{\beta} M[x \mapsto N]$$

β-редекс β-редукция β-редукт

Редукциите са бинарни релации над термове. $R \subseteq \Lambda^2$

Нека $\beta_\circ := \{ ((\lambda_x M), M[x \mapsto N]) \mid M, N \in \Lambda,\ x \in V \}$

$$(\lambda_x \underbrace{(\lambda_y y)(z\, x)}_{y[y \mapsto z\, x]}) \xrightarrow{\beta} \lambda_x z\, x \text{, не са в } \beta_\circ$$

def. λ-затваряне: — добавяне на терм отстрани

Нека имаме $R \subseteq \Lambda^2$. Деф. индуктивно $R^\lambda \subseteq \Lambda^2$, което наричаме λ-затваряне на R:

(В) $(M, N) \in R \Rightarrow (M, N) \in R^\lambda$ $(R \subseteq R^\lambda)$

(Δ) ~~1) $(M, N) \in R^\lambda$~~ 2а) $(M_1, M_2) \in R^\lambda \Rightarrow (MN_1, MN_2) \in R^\lambda$, $M \in \Lambda$

2) 2б) $(M_1, M_2) \in R^\lambda \Rightarrow (M_1 N, M_2 N) \in R^\lambda$, $N \in \Lambda$

3) 3) $(M_1, M_2) \in R^\lambda \Rightarrow (\lambda_x M_1, \lambda_x M_2) \in R^\lambda$, $x \in V$

def. (подтерм) M е подтерм на N $(M \leq N)$, ако: (инд. ~~...~~)

1) $M \leq M$ (всеки терм е подтерм на себе си)
2) $MN \leq P \Rightarrow_{\text{и}} M \leq P,\ N \leq P$
3) $\lambda_x M \leq P \Rightarrow_{\text{и}} M \leq P$

hw. док., че „≤" е частична наредба

hw. док., че $(M, N) \in R^\lambda \iff$ ∃ съотв. два подтерма M' и N' на M и N, които са в R.

по-точно: ∃ терм P и $x \notin FV(MN) \cup BV(MN)$:

1) $M \equiv P[x \mapsto M']$
2) $N \equiv P[x \mapsto N']$
3) $(M', N') \in R$

$P := \square\ x\ \square$; $N' \Rightarrow P \equiv N$; $M' \Rightarrow P \equiv M$

def. (β-редукция) $\xrightarrow{\beta} := \beta_\circ^\lambda$ (β навсякъде в λ-терма)

$\xleftarrow{\beta} := (\xrightarrow{\beta})^{-1}$ — β-експанзия

Примери: ① $(\lambda_x x)\, y \xrightarrow{\beta} x[x \mapsto y] \equiv y$

② $\lambda_z \underbrace{((\lambda_x \lambda_y x)(\lambda_u u))}_{\beta\text{-редекс}}(\lambda_u uzu)\, z \xrightarrow{\beta} \lambda_z (\lambda_y \lambda_u u)(\lambda_u uzu)\, z$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_z (\lambda_u u)\, z \xrightarrow{\beta} \lambda_z z$

③ $(\lambda_x x z)((\lambda_y z y) z) \xrightarrow{\beta} ((\lambda_y z y) z)\, z \xrightarrow{\beta} z z z$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_x x z)(z z)$

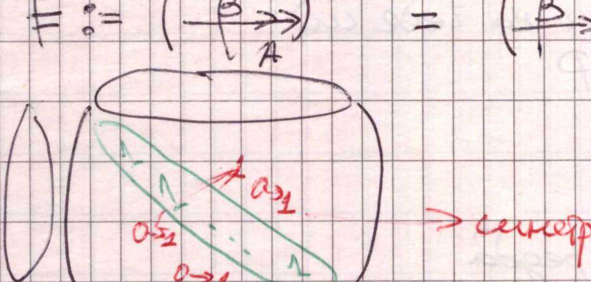
Term rewriting – R^λ

Многостъпкова редукция:

$\twoheadrightarrow_\beta := (\to_\beta)^{R,T}$

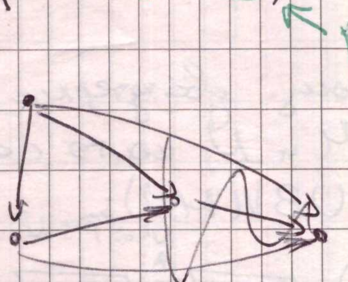
$M \twoheadrightarrow_\beta N \iff \exists M_0, M_1, \dots, M_n$, така че $M_0 \equiv M \to_\beta M_1 \to_\beta \dots \to_\beta M_n \equiv N$

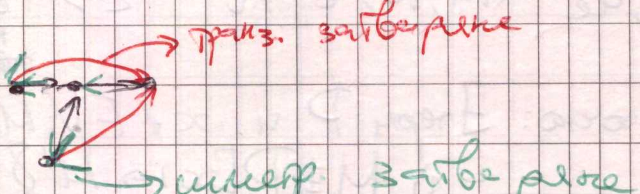
$=_\beta := (\twoheadrightarrow_\beta)^{S,T} = (\to_\beta)^{R,S,T}$

A 

$G = (V, E)$

$(i,j) \in E^n \iff$ от i до j има път с дължина поне n





симетрично премахва транзитивно.

9 λ-смятане

def. M е β-нормална форма, ако $\nexists N \xleftarrow{\beta} M$.
M е нередуцируем.

$\omega := \lambda_x x x$ → N, N_1, N_2

Ω – безкраен цикъл

$\Omega :\equiv \omega\omega \equiv (\lambda_x xx)(\lambda_x xx)$

$\xrightarrow{\beta} xx[x \mapsto \lambda_x xx]$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_x xx)(\lambda_x xx) \equiv \omega\omega$

$M_1 \overset{\beta}{=} M_2$ – β еквив., но нямат н. φ-ма

Ω

– β-еквив = две прогр. да сметнат едно и също нещо (оп. еквив.)

– н. φ-ма = двете прогр. винаги зав. с този резулт.

β-редукция в безименни λ-термове:

$\times\ (\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$ $\times$ не е вярно

$(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$

$(\lambda 0\,1)\,0 \xrightarrow{\beta(*)} 0\,1[0 \mapsto 0] \equiv 0\,1$:(

$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1}(M[0 \mapsto \uparrow^1 N])$

защото временно вдигане

hw. Докажете че $\xrightarrow{\beta}$ са съпаднати в Λ и Λ^*:

1) $M \in \Lambda_{\#}, \Gamma \Rightarrow$ ~~$\#_\Gamma(M)$~~ $b_\Gamma(M) \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow \exists M' \in \Lambda$ $b_\Gamma(M') \xrightarrow{\beta} N$

2) $M \in \Lambda^*, \Gamma \Rightarrow \exists M' \in \Lambda^*, M \xrightarrow{\beta} M'$ $\#_\Gamma(M) \overset{\alpha}{=} N$ $\xrightarrow{\beta} N$

Упражнения: $(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x \mapsto N]$

VI Λ — Very Important Λ-terms:

$\omega := \lambda_x xx$, $\Omega := \omega\omega$

$I := \lambda_x x$

$K := \lambda_{x,y} x$

$K^* := \lambda_{x,y} y$

$S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

$IM \xrightarrow{\beta} M$

$KM \xrightarrow{\beta} \lambda_y M$ (конст. M) $KMN \xrightarrow{\beta} \cancel{\lambda_x} M$

$K^*M \xrightarrow{\beta} \cancel{\lambda_y y}\ \lambda_x y\ \lambda_y y \equiv I$ $K^*MN \xrightarrow{\beta} N$

$SMNP \xrightarrow{\beta} MP(NP)$ $\cancel{SKK \xrightarrow{\beta} \lambda_z Kz(Kz)}$

$\cancel{SKS \xrightarrow{\beta} \lambda_z Kz(Sz)}$

$\cancel{\lambda_z Kz(\lambda_{x,y} xz(yz))}$

$SKK \xrightarrow{\beta} \cancel{\lambda_z Kz(Kz)} \xrightarrow{\beta} \cancel{\lambda_z \lambda_u z}\ \lambda_{y,z} Kz(uz)$

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_{y,z}(\lambda_y z)(uz))K \xrightarrow{\beta} \underbrace{(\lambda_{u,z} z)}_{K^*} K \xrightarrow{\beta} I$

С $\underline{\underline{S}}$ и $\underline{\underline{K}}$ можем да мод. цялото λ-смятане

S, K - комбинатори

Curry - комбинаторна логика

Tvr. Нека $M, N \in \Lambda$:

- Алгоритъм за формулиране на λ-термове с S и K

1) $I \xleftarrow{\beta} SKK$ ✓
2) $\lambda_x M \xleftarrow{\beta} KM$ ✓ $x \notin FV(M)$
3) $\lambda_x MN \xleftarrow{\beta} S(\lambda_x M)(\lambda_x N)$

$S(\lambda_x M)(\lambda_x N) \xrightarrow{\beta} \lambda_z((\lambda_x M)z)((\lambda_x N)z)$

$\cancel{\xrightarrow{\beta} \lambda_z MN}$ $\lambda_z(M[x \mapsto z])(N[x \mapsto z]) \overset{\alpha}{\equiv} \lambda_x MN$

? $\cancel{\xrightarrow{\alpha} \lambda_x MN}$

(10) λ-смятане

$K^* \overset{\beta}{=} SK$

$K^* \overset{\beta}{=} \lambda_{x,y} y \overset{\beta}{\underset{2}{=}} K(\lambda_y y) \underset{1}{=} K(SKK)$

хомоморфизъм

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & \bullet \\ \bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet \arrow[u, "\varphi^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$\lambda_{x,y} yx \overset{\beta}{=} \cancel{S(\lambda_{x,y} y)(\lambda_{x,y} x)} \; SK^*K$

$$\lambda_x(S(\lambda_y y)(\lambda_y x)) = \lambda_x(S(SKK)(Kx))$$

$$= S(\lambda_x S(SKK))(\lambda_x Kx) =$$

$$\cancel{= S(S(\lambda_x S)(\lambda_x SKK))(}$$

$$= S(K(S(SKK)))\,S(\lambda_x K)(\lambda_x x) =$$

$$= S(K(S(SKK)))\,S(KK)(SKK) \;\blacksquare$$

hw. Док, че $\forall$ затворен λ-терм може да се изрази чрез S и K

\+ имплементация

$\lambda_x xx \overset{\beta}{\underset{3}{=}} S(\lambda_x x)(\lambda_x x) \overset{\beta}{\underset{1^2}{=}} S(SKK)(SKK)$

β-редукцията може да бъде моделирана с

$Kxy \xrightarrow{c} x$ (Curry редуцира)

$Sxyz \xrightarrow{c} xz(yz)$

---

hw Пример за $M, N \in \Lambda$: $M \not\overset{\beta}{=} N$, но $\lambda + ext \models M = N$

def. Операционна еквивалентност

$\lambda \models M = N \iff M \overset{\beta}{=} N$ синтакс. $\vdash$ семант. $\models$

пр.: $(\lambda_x fx)M \overset{\beta}{=} fM$, но $\lambda_x fx \not\overset{\beta}{=} f$

def. $M, N \in \Lambda$ са екстенционално $=$, ако:

1) $\lambda \vDash M = N$, то $\lambda + ext \vDash M = N$

2) $x \notin FV(MN)$, $\lambda + ext \vDash Mx = Nx$, то $\lambda + ext \vDash M = N$

hw. Док., че $\lambda + ext \vDash \circ = \circ$ е λ-съвместима релация на еквивалентност: Λ, R, S, T са изпълнени за нея.

$\eta := \{ (\underbrace{\lambda_x M x}_{f}, \underbrace{M}_{g}) \mid x \in V \setminus FV(M), M \in \Lambda \}$ - ета редукция

$\xrightarrow{\eta} := \eta^{\lambda}$ пр. `int f(int x) { return g(x); }` $\xrightarrow{\eta} g(x)$

$\xrightarrow{\eta}\!\!\!\!\!\rightarrow := (\xrightarrow{\eta})^{R,T}$

$\overset{\eta}{=} := (\xrightarrow{\eta})^{R,T,S} = (\xrightarrow{\eta})^{S,T}$

$\overset{\beta\eta}{=} := (\xrightarrow{\beta} \cup \xrightarrow{\eta})^{R,S,T} = (\overset{\beta}{=} \cup \overset{\eta}{=})^{T} = (\beta \cup \eta)^{\Lambda,R,S,T}$

тв. $\lambda + ext \vDash M = N \iff M \overset{\beta\eta}{=} N$

д-во: $\Rightarrow$) Нека $\lambda + ext \vDash M = N$

1) Нека $\lambda \vDash M = N \overset{\text{деф.}}{\Longrightarrow} M \overset{\beta}{=} N$, $\overset{\beta}{=} \subseteq \overset{\beta\eta}{=}$

2) Нека $x \notin FV(MN)$, $Mx \overset{\beta\eta}{=} Nx$ $\quad ? M \overset{\beta\eta}{=} N$

$M \overset{\eta}{=} \lambda_x Mx \underset{\substack{\text{ип} \\ + \\ \lambda\text{-затв.}}}{\overset{\beta\eta}{=}} \lambda_x Nx \overset{\eta}{=} N$

$\Rightarrow \lambda + ext \vDash \circ = \circ \subseteq \overset{\beta\eta}{=}$

$\Leftarrow$) Нека $M \overset{\beta\eta}{=} N$ 2 базови индукц. от $(\beta \cup \eta)^{\Lambda,R,T,S}$

β) ~~$M \overset{\beta}{=} N$~~ $M \beta N \Rightarrow M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow M \overset{\beta}{=} N$

$\Rightarrow \lambda \vDash M = N \underset{\substack{\text{базова ип.} \\ \text{на ext.}}}{\Rightarrow} \lambda + ext \vDash M = N$

η) $M \eta N \Rightarrow M \equiv \lambda_x Nx$, $x \notin FV(N)$

Нека произв. $y \notin FV(MN)$

$My \equiv (\lambda_x Nx)y \xrightarrow{\beta} Ny \Rightarrow My \overset{\beta}{=} Ny \Rightarrow \lambda + ext \vDash My = Ny \underset{(1)}{\Rightarrow} \lambda + ext \vDash M = N$ ◼

(11) λ-смятане

η дуална на β $\quad \lambda_x Mx \xrightarrow{\eta} M$

$$(\lambda_x M)x \xrightarrow{\beta} M$$

Изчисления в λ-смятането

<u>def.</u> Нумерали на Чърч:

$$C_n : \lambda_{f,x} \underbrace{f(f(f \dots f\, x))}_{n\text{-пъти}} \quad \text{неформално}$$

<u>def.</u> (n-кратно прилагане) $\lambda_{f,x} f^n x$

$M, N \in \Lambda$

1) $M^0 N := N$

2) $M^{n+1} N := M(M^n N)$

$C_0 := \lambda_{f,x} f^0 x \equiv \lambda_{f,x} x \equiv K^*$

$C_1 := \lambda_{f,x} f x \underset{\eta}{\not\equiv} \lambda_f f \equiv I$

$\qquad\qquad \equiv \lambda_f(\lambda_x f x)$

$C_5 := \lambda_{f,x} f(f(f(f(f\,x))))$

<u>зад.</u> $C_S C_m \overset{\beta}{=} C_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$C_S := \lambda_m(\lambda_{f,x} f(m \cancel{f x}))$ – добавене на 1

$\quad := \lambda_m(\lambda_{f,x} m f(f x)) \overset{\beta}{\equiv}$

<u>Тв.</u> $C_S C_n \overset{\beta}{=} C_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

<u>д-во:</u> Индукция по n

(Б)$_{n=0}$ $C_S C_0 \equiv (\lambda_{n,f,x} f(n f x))(\lambda_{f,x} x) \xrightarrow{\beta} \cancel{(\lambda_{f,x} f(\lambda_{f,x}}$

$(\lambda_{f,x} f((\lambda_{f,x} x) f x)) \xrightarrow{\beta} (\lambda_{f,x} f x) \equiv C_1.$ $\quad (\lambda_{f,x} x \equiv K^*)$

(И.С.) $n > 0$ да доп., че $C_S C_n \overset{\beta}{=} C_{n+1}$. Ще док., че $C_S C_{n+1} \overset{\beta}{=} C_{n+2}$

$$C_S C_{n+1} \equiv (\lambda_{n,f,x} f(n f x))(\lambda_{f,x} f^{n+1} x) \xrightarrow{\beta} $$

$$(\lambda_{f,x} f(\underbrace{(\lambda_{f,x} f^{n+1} x) f x}))) \xrightarrow{\beta} (\lambda_{f,x} f(f^{n+1} x))$$

$$\Downarrow \beta$$

$$f^{n+1} x \qquad \overset{def}{\equiv} (\lambda_{f,x} f^{n+2} x) \equiv C_{n+2} \checkmark$$

$$f^{n+1} x$$

Ѿ: коректност на втората деф.

Зад. Да се деф. комб. $C_+ : \forall m,n \in \mathbb{N} \quad C_+ C_m C_n \overset{\beta}{=} C_{m+n}$

Решение:

$$C_+ := \lambda_{m,n,f,x}\, m f(n f x)$$

д-во: $(\lambda_{m,n,f,x}\, m f(n f x))(\lambda_{f,x} f^m x)(\lambda_{f,x} f^n x)$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_{f,x} (\lambda_{f,x} f^m x) f ((\lambda_{f,x} f^n x) f x))$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_{f,x} (\lambda_{f,x} f^m x) f (f^n x)$$

$$\xrightarrow{\beta} \lambda_{f,x} (f^m (f^n x)) \overset{?}{\equiv} C_{m+n} \equiv \lambda_{f,x} f^{m+n} x$$

Lem. $f^m(f^n x) \equiv f^{m+n} x \quad \forall f,x \in \Lambda,\ m,n \in \mathbb{N}$

д-во: Индукция по m

1сл. $f^0(f^n x) \overset{def}{\equiv} f^n x$ ∎

2сл. Да док., че е вярно за

$$f^m(f^n x) = f^{m+n} x$$

$$f^{m+1}(f^n x) \overset{def}{\equiv} f(f^m(f^n x)) \overset{u.u.}{\equiv} f(f^{m+n} x)$$

$$\overset{def}{\equiv} f^{(m+1)+n} x$$ ∎

$$\text{II н.)}\ C_+' := \lambda_{m,n}\, m(C_S) n = \lambda_{m,n}\, m \cancel{(C_S)\, n}\ \lambda_{k,f,x}\, f(k f x))\, n$$

$$C_+ \underset{\text{нуж}}{\overset{?}{=}} C_+'$$

Ѿ. $\exists M,N: \quad C_+ MN \overset{\beta}{\neq} C_+' MN$

(12) λ-смятане

Даде деф. C^*, така че $\forall_{m,n} \in \mathbb{N} : C_* C_m C_n \overset{\beta}{=} C_{m*n}$

~~$C_* := \lambda_{m,n}\, m\,(C_+ n\, n)$~~

I) $C'_* := \lambda_{m,n}\, m\,(C_+ n)\, C_0 \quad nf \quad m.n = (+n)^m(0)$

II) $C^*_* := \lambda_{m,n,f,x}\, m\,(\lambda_y\, n f\, y)\, x \qquad \underset{\substack{\parallel \\ C_+ n}}{\overset{\parallel}{\lambda_k C_+ n\, k}}$

$\overset{\parallel}{n}$

Нека y е $f^k x$

Искам $f^{n+k} x$

$= \lambda_{m,n,f,x}\, \overset{n}{\cancel{m}}_{m}(nf)\, x \overset{\beta}{\underset{n}{=}} \overset{\eta}{=} \lambda_{m,n,f}\, m(nf)$

$C'_* = \lambda_{m,n}\, m(\lambda_{n,k,f,x}\, n\, f(k\, f\, x))\, n)\, (\lambda_{f,x}\, x)$

$\xrightarrow{\beta} \lambda_{m,n}\, m\,(\lambda_{k,f,x}\, n\, f\,(k\, f\, x))\,(\lambda_{f,x}\, x)$

$C_{exp}\, C_m\, C_n \overset{\beta}{=} C_{m^n} \qquad m,n \in \mathbb{N},\ m>0$

$C'_{exp} = \lambda_{m,n}\, \overset{n}{\cancel{m}}(C_*\, \overset{m}{\cancel{m}})\, C_1 \qquad m \qquad m^n = (\cdot m)^n\, 1$

$C_{exp} = \lambda_{m,n,f}\, n\,(\lambda_g\, m\, g)\, f \overset{\eta}{=} \lambda_{m,n,f}\, n\, m\, f \overset{\eta}{=} \lambda_{m,n}\, nm$

$\overset{\parallel}{n}$

$\overset{\shortparallel}{f^k} \longmapsto f^{mk} \qquad C_m g \xrightarrow{\beta} \lambda_x\, g^m x$

$\overset{\eta}{=} g^m$

hw. $C_{hyp}\, C_m C_n := C_{\underbrace{m^{m^{\cdot^{\cdot^{m}}}}}_{n\text{-пъти}}}$

hw. $A(0, y) := y+1$ — succ

$A(x+1, 0) := A(x, 1)$

$A(x+1, y+1) := A(x, A(x+1, y))$

Зад. $C_! C_n \overset{\beta}{=} C_{n!}$ $\quad n! = n(n-1)\dots 1$

$f(0) := c$
$f(n+1) := g(n, f(n))$

Искаме: $C_{tt} := K \quad C_{if}\, C_{tt} M N \overset{\beta}{=} M$
$C_{ff} := K^* \quad C_{if}\, C_{ff} M N \overset{\beta}{=} N$
$C_{if} := \lambda_{p,x,y}\, p\, x\, y \overset{\eta}{=} \lambda_{p,x}\, p\, x \overset{\eta}{=} \lambda_p\, p \equiv I$

Зад. $C_{=0}\, C_n \overset{\beta}{=} C_{n=0}$

$C_{=0} := \lambda_n\, n(\lambda_x\, C_{ff})(C_{tt})$

h.w. Ф-я $C_= C_m C_n \overset{\beta}{=} C_{m=n}$
$C_< C_m C_n \overset{\beta}{=} C_{m<n}$

Зад. $C_\neg C_p \overset{\beta}{=} C_{\neg p}$

$C_\neg := \cancel{\lambda_n\, n\,(C_{tt})(\lambda_x\, C_{ff})}$
$\lambda_p\, p\, C_{ff}\, C_{tt}$

$C_\wedge C_p C_q \overset{\beta}{=} C_{p\wedge q}$ $\qquad C_\vee C_p C_q \overset{\beta}{=} C_{p\vee q}$

$C_\wedge := \cancel{\lambda_{p,q}\, p(q)(q)(C_{ff})}$
$\lambda_{p,q}\, p(q(C_{tt})(C_{ff}))(C_{ff})$
$:= \lambda_{p,q}\, p\, q\, C_{ff}$

$C_\vee := \lambda_{p,q}\, p(C_{tt})(q)$
$C_\vee := \lambda_{p,q}\, p(C_{tt})(q(C_{tt})(C_{ff}))$
$\cancel{C_\vee := \lambda}$
$:= \lambda_{p,q}\, p\, C_{ff}\, q$

Зад. $C_p C_n \overset{\beta}{=} C_{n\dot{-}1}$

$$n \dot{-} m = \begin{cases} n-m, & n \ge m \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Искаме: C_L – лява комп., такива $C_L(C_{<>} M N) \overset{\beta}{=} M$
$C_\lrcorner$ – дясна комп. $\quad C_\lrcorner(C_{<>} M N) \overset{\beta}{=} N$
$C_{<>}$ – двойка $\Rightarrow C_{<>} := \lambda_{x,y,z}\, z\, x\, y \overset{\beta}{=} \lambda_z\, z M N$
$C_L := \lambda_t\, t K$
$C_\lrcorner := \lambda_t\, t K^*$

$\cancel{C_p :\equiv \lambda_n\, n(\lambda_t C_{<>}(\ )(\ ))(C_{<>} C_0 C_0)}$

$\cancel{C_p :\equiv \lambda_n\, n(\lambda_t C_{<>}(C_S(C_1 t))}$

$C_p :\equiv \lambda_n C_1 (n(\lambda_t C_{<>}(C_S(C_1 t))(C_2 t))(C_{<>} C_0 C_0))$

$0 \mapsto \langle 0, 0\rangle$
$1 \mapsto \langle 1, 0\rangle$
$2 \mapsto \langle 2, 1\rangle$
$3 \mapsto \langle 3, 2\rangle$
$4 \mapsto \langle 4, 3\rangle$

$0 \mapsto \langle 0, 0!\rangle$
$1 \mapsto \langle 1, 1!\rangle$
$2 \mapsto \langle 2, 2!\rangle$
$3 \mapsto \langle 3, 3!\rangle$
$\vdots$

$C_! :\equiv \lambda_n C_1 (n \lambda_t C_{<>}(C_S(C_1 t))\underbrace{(\cancel{C_*(\ )})}_{C_*((C_S(C_1 t))(C_1 t))}(C_{<>} C_0 C_1)$

<u>th.</u> За неподв. точка.

$F \in \Lambda \Rightarrow \exists X \in \Lambda : FX \overset{\beta}{=} X$

(за всеки терм, $\exists$ друг, който има неподв. точка)

Нещо повече, $\exists Y \in \Lambda : F(YF) \overset{\beta}{=} YF$.

<u>д-во:</u> Ще търсим $Y \in \Lambda$: $YF \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} F(YF)$

$? \omega_F : \omega_F \omega_F \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} F(\omega_F \omega_F)$ $\qquad \Omega :\equiv \omega\omega$

$\omega :\equiv \lambda_x xx$

$\omega_F :\equiv \lambda_x F(xx)$ $\qquad \Omega \overset{\beta}{\rightarrow} \Omega$

$\Rightarrow Y :\equiv \lambda_F \omega_F \omega_F \equiv \lambda_F (\lambda_x F(xx))(\lambda_x F(xx))$ ∎

$Fact :\equiv \lambda_{f,n} C_{=0}\, n\, C_1 (C_*\, n (f(C_p n)))$

$Y Fact \equiv \lambda_F (\lambda_x F(xx))(\lambda_x F(xx))(\lambda_{f,n} C_{=0}\, n\, C_1 (C_*\, n (f(C_p n))))$

$\overset{\beta}{\rightarrow} \cancel{\lambda_x Fact(xx)}$

$\lambda_x(\lambda_{f,n} C_{=0}\, n\, C_1 (C_*\, n (f(C_p n)))(xx))(\ldots)$

безкрайно

$\xrightarrow{\beta} (\lambda_x (\lambda_n\, c_{=0}\, n\, c_1 (c_* \, n (xx)) (c_p\, n))) (\ldots)$

$Y Fact\ c_0 \xrightarrow{\beta} (\lambda_n (c_{=0}\, n\, c_1 (c_* n ((\ldots)(\ldots)) (c_p\, n)) c_0$

$\xrightarrow{\beta} c_{=0}\, c_1 (c_*\, 0\, ((\ldots)(\ldots)) (c_p 0) \xrightarrow{\beta} c_1$

$\lambda_x xx \xleftrightarrow{\eta} \lambda_{x,y} xxy$

Нужно е да отложим оценяването на Y:

$$Y' := \lambda_F \cancel{(\lambda_{x,y} F(xxy))(\lambda_{x,y} F(xxy))}$$
$$= \lambda_F (\lambda_x F(\lambda_y xxy))(\lambda_x F(\lambda_y xxy))$$

Нужно е и $Fact$ да ~~е~~ с отложено оценяване.

$$Fact' := \cancel{\lambda_{f,n}\, c_{=0}\, n (\lambda_y c_1)(\lambda_y c_* n (f (c_p n)))} (0)$$
$$:= \lambda_{f,n}\, c_{=0}\, n (c_1)(\lambda_y c_* n (f (c_p n)) (y))$$

y

Вкл. while цикъл

$Y := \lambda_F (\lambda_x F(xx)) (\lambda_x F(xx))$

$\Theta := (\lambda_{x,F} F(xxF)) (\lambda_{x,F} F(xxF))$ — Тюринг

$\Theta \xrightarrow{\beta} \lambda_F F(\underbrace{(\lambda_{x,F} F(xxF))(\lambda_{x,F} F(xxF))}_{\Theta} F)$

$\Theta F \xrightarrow{\beta} F(\Theta F)$

Вкл. Симулация на МТ с λ-смятане

Да се док., че с Y може да се симулира $\forall$ МТ

Стратегии за редуциране

1. Всеки терм ли има нормална форма? не → Ω, Y
2. Възможно ли е терм да има повече от една Н.Ф.? ✗
3. Възможно ли е терм да има Н.Ф., но да не можем да стигнем до нея с дадена страт. за редукция? ✓
4. Има ли страт. за редукция, която винаги стига до Н.Ф.?

3. пр. $Y\,Fact\,c_3$ → не зав. (Scheme)
→ зав. (lambda interp.)

4. пр. $KI\Omega \equiv (\lambda_{x,y}x)(\lambda_x x)((\lambda_x xx)(\lambda_x xx))$

вътрешен (стратегия I) → $KI\Omega$

външен (стратегия II) → $(\lambda_y \lambda_x x)\Omega = (\lambda_y I)\Omega$

вътр. (страт. I) → $(\lambda_y I)\Omega$

външен (II) → I

Граф. на редукциите

Н.Ф. - път в графа, който стига до връх без изх. ребра

$$\begin{array}{ccc} KI\Omega \circlearrowleft_\beta & \Omega \circlearrowleft_\beta & YF \\ \downarrow\beta & & \downarrow\beta \\ (\lambda_y I)\Omega \circlearrowleft_\beta & & F(YF) \\ \downarrow\beta & & \downarrow\beta \\ I & & F(F(YF)) \\ & & \downarrow\beta \\ & & \vdots \end{array}$$

краен граф, пълен с цикли

безкраен граф. с безкр. път

$$\begin{tikzcd}
\underline{YFact}\ c_3 \arrow[dr, "\beta"] & & \\
& \underline{Fact(YFact)}\ c_3 \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
& \dots \arrow[d] & \dots \\
& c_6 &
\end{tikzcd}$$

стратегията намира кратък път в графа.

def. Силна нормализируемост. Казваме, че терм е силно нормализируем, ако при всяка стратегия за редукция стигне до Н.Ф. (т.е. графът на редукциите е краен, ацикличен)

def. (н.ф.) M е в н.ф. $\iff \nexists M' \overset{\beta}{\leftarrow} M$ (бележим $M \not\xrightarrow{\beta}$)

def. Казваме, че N е н.ф. на M, ако $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N \not\xrightarrow{\beta}$

def. (◇ св-во на Чърч-Росер/Диаманта) R релация, казваме, че R удовл. св-вото на ◇, ако:

$$\forall x, y, z\, (xRy \wedge xRz \to \exists t\, (yRt \wedge zRt))$$

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
y \arrow[dr] & & z \arrow[dl] \\
& t &
\end{tikzcd}$$

$\xrightarrow{\beta}$ не удовл. ◇!

def. (конфлуентност) R е конфлуентна, ако $R^{R,T}$ е ◇.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
M_1 \arrow[dr] & & M_2 \arrow[dl, "\beta"] \\
& N &
\end{tikzcd}$$

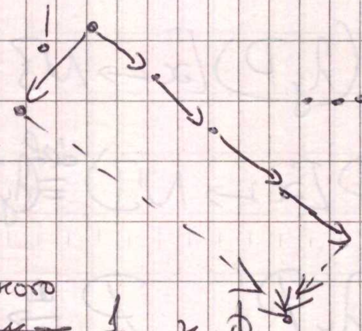
(ако забием в едната и в другата посока, пак можем да се върнем до едно и също място) λ-смятане ⑮

Lem. Ако $\xrightarrow{\beta}$ е конфлуентна, то $\twoheadrightarrow_\beta$ е конфлуентна.

д-во: $\twoheadrightarrow_\beta$ конфл. $\Rightarrow$ $(\twoheadrightarrow_\beta)^{R,T}$ е $\diamond$ $\} \overset{деф.}{\Longrightarrow}$ $\twoheadrightarrow_\beta$ конф.

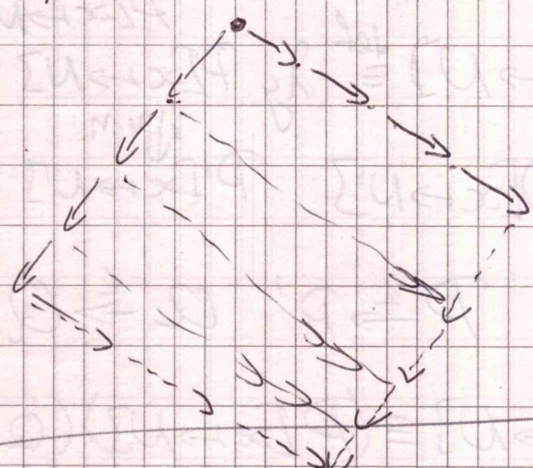
$\twoheadrightarrow_\beta \boxed{= (\xrightarrow{\beta})^{R,T}}$

Th Strip-лема: 1 стъпка в 1 посока и мн. ст.



$\ldots\boxed{(\lambda_x M)N}\ldots \to \ldots M[x\mapsto N]\ldots$

Чърч-Росер: Има ~~точно~~ най-много 1 н. ф.



$$(\xrightarrow{1})^{R,T} = \twoheadrightarrow_\beta = (\xrightarrow{\beta})^{R,T}$$

def. $(\xrightarrow{1})$:

1) $M \xrightarrow{1} M$

2) $M \xrightarrow{1} N \Rightarrow \lambda_x M \xrightarrow{1} \lambda_x N$ (λ-затваряне)

3) $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow MN \xrightarrow{1} M'N'$

* 4) $M \xrightarrow{1} M'$ и $N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow (\lambda_x M)N \xrightarrow{1} M'[x\mapsto N']$

Lem 1. $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N' \Rightarrow M[x\mapsto N] \xrightarrow{1} M'[x\mapsto N']$

д-во: ~~(деф. на $\xrightarrow{1}$)~~ Главна инд. по $M \xrightarrow{1} M'$ и вт. инд. по $M[x\mapsto N]$.

1сл. $M \equiv M'$. Трябва да док., че $M[x \mapsto N] \xrightarrow{1} M[x \mapsto N']$

1.1) $M \equiv x \Rightarrow M[x \mapsto N] \stackrel{def}{\equiv} N \xrightarrow{1} N' \equiv M'[x \mapsto N']$

1.2) $M \equiv y \neq x \Rightarrow M[x \mapsto N] \stackrel{def}{\equiv} y \xrightarrow{1} y \equiv M'[x \mapsto N']$

1.3) $M \equiv M_1 M_2 \Rightarrow (M_1 M_2)[x \mapsto N] \equiv_{def} (M_1[x \mapsto N])(M_2[x \mapsto N])$

$M_1[x \mapsto N']$ (1 ⇓ ин.) $\quad M_2[x \mapsto N']$ (1 ⇓)

$$\boxed{\xrightarrow[3)\stackrel{1}{\Rightarrow}]{1}} (M_1[x \mapsto N'])(M_2[x \mapsto N']) \equiv_{def} (M_1 M_2)[x \mapsto N']$$

1.4) $M \equiv \lambda_y P^*$ $\quad (\lambda_y P)[x \mapsto N] \stackrel{def}{\equiv} \lambda_y (P[x \mapsto N])$

$P[x \mapsto N']$ (ц.п. ⇓1)

$$\xrightarrow[2)\stackrel{1}{\Rightarrow}]{1} \lambda_y (P[x \mapsto N']) \stackrel{def}{\equiv} (\lambda_y P)[x \mapsto N']$$

2сл. $M \equiv \lambda_y P \quad M' \equiv \lambda_y P' \quad P \stackrel{1}{\Rightarrow} P'$; по И.П. $P[x \mapsto N] \xrightarrow{1} P'[x \mapsto N']$

$$M[x \mapsto N] \equiv (\lambda_y P)[x \mapsto N] \stackrel{def}{\equiv} \lambda_y P[x \mapsto N]$$

$P'[x \mapsto N']$ (1 ⇓ и.п.)

$$\xrightarrow[2)\Rightarrow]{1} \lambda_y P'[x \mapsto N'] \stackrel{def}{\equiv} (\underbrace{\lambda_y P'}_{M'})[x \mapsto N']$$

3сл. $M \equiv PQ \quad M' \equiv P'Q' \quad P \stackrel{1}{\Rightarrow} P' \quad Q \stackrel{1}{\Rightarrow} Q'$

$$M[x \mapsto N] \equiv (PQ)[x \mapsto N] \equiv (P[x \mapsto N])(Q[x \mapsto N])$$

$P'[x \mapsto N']$ (⇓1) $\quad Q'[x \mapsto N']$ (⇓1)

$$\xrightarrow[3)\stackrel{1}{\Rightarrow}]{1} (P'[x \mapsto N'])(Q'[x \mapsto N']) \stackrel{def}{\equiv} (\underbrace{P'Q'}_{M'})[x \mapsto N']$$

4сл. $M \equiv (\lambda_y P) Q \quad M' \equiv P'[y \mapsto Q'] \quad P \stackrel{1}{\Rightarrow} P', \; Q \xrightarrow{1} Q'$

$$\cancel{M}((\lambda_y P) Q)[x \mapsto N] \stackrel{def}{\equiv} (\lambda_y P[x \mapsto N]) \, Q[x \mapsto N]$$

$P'[x \mapsto N']$ (⇓1) $\quad Q'[x \mapsto N']$ (⇓1)

$$\xrightarrow[2),3)]{1} \cancel{(\lambda_y P'[x \mapsto N'])(Q'[x \mapsto N'])}$$

$$\xrightarrow[4)]{1} P'[x \mapsto N'][y \mapsto Q'[x \mapsto N']]$$

$$M'[x \mapsto N'] \equiv P'[y \mapsto Q'][x \mapsto N'] \stackrel{\text{лема субст.}}{\equiv} P'[x \mapsto N'][y \mapsto Q'[x \mapsto N']]$$

$y \notin FV(N')$ (по конв.) ■

б) $P \equiv \lambda_x R$ $\quad M_2 \equiv \cancel{R_2[x \mapsto}\ R_2[x \mapsto Q_2]$

$Q \xrightarrow{1} Q_2 \quad R \xrightarrow{1} R_2$

3

$$\begin{tikzcd}
\lambda_x R \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "1\ 2)"] & \\
P_1 \equiv^{1)} \lambda_x R_1 \arrow[dr, "1\ 2)"'] & \lambda_x R_2 \arrow[d, "1\ 2)"] \\
 & \lambda_x R_3
\end{tikzcd}$$

1

$$\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
Q_1 \arrow[dr, "1"'] & & Q_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists Q_3 &
\end{tikzcd}$$

2

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
R_1 \arrow[dr, "1"'] & \text{и.п.} & R_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists R_3 &
\end{tikzcd}$$

4

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda_x R) Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
(\lambda_x R_1) Q_1 \arrow[dr, "1\ 4)"'] & & R_2[x \mapsto Q_2] \arrow[dl, "1\ \text{лем 1}"] \\
 & R_3[x \mapsto Q_3] &
\end{tikzcd}$$

4) $M \equiv (\lambda_x P) Q \quad M_1 \equiv P_1[x \mapsto Q_1] \quad P \xrightarrow{1} P_1 \quad Q \xrightarrow{1} Q_1$

~~По 12.2)~~ $(\lambda_x P) Q \xrightarrow{1} M_2$, по 12.2

a) $M_2 \equiv R_2 Q_2$, $\lambda_x P \xrightarrow{1} R_2$ $\quad Q \xrightarrow{1} Q_2$

$\Downarrow$ 12.2)

$R_2 \equiv \lambda_x P_2$, $P \xrightarrow{1} P_2$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1 \arrow[dr, "1"'] & \text{и.п.} & P_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists P_3 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
Q_1 \arrow[dr, "1"'] & \text{и.п.} & Q_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists Q_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda_x P) Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr] & \\
P_1[x \mapsto Q_1] \arrow[dr, "1\ 11"'] & & (\lambda_x P_2) Q_2 \arrow[dl, "1\ 4)"] \\
 & P_3[x \mapsto Q_3] &
\end{tikzcd}$$

б) $M_2 \equiv P_2[x \mapsto Q_2]$

$P \xrightarrow{1} P_2 \quad Q \xrightarrow{1} Q_2$

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1 \arrow[dr, "1"'] & \text{и.п.} & P_2 \arrow[dl, "1"] \\
 & \exists P_3 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
Q_1 \arrow[dr] & \text{и.п.} & Q_2 \arrow[dl] \\
 & \exists Q_3 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (\lambda_x P) Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
P_1[x \mapsto Q_1] \arrow[dr, "1"'] & 11 & P_2[x \mapsto Q_2] \arrow[dl, "1"] \\
 & P_3[x \mapsto Q_3] =: M_3 &
\end{tikzcd}$$

hw. ~~M[x:)~~ $M \xrightarrow{\beta} M'$ $\quad M[x \mapsto N] \xrightarrow{\beta} M'[x \mapsto N]$ (16) λ-смятане

трудно → 2) $N \xrightarrow{\beta} N'$ $\quad M[x \mapsto N] \twoheadrightarrow_{\beta} M[x \mapsto N']$

Лем 2. (за обръщането)

1) Ако $\lambda_x M \xrightarrow{1} P$, то $P \equiv \lambda_x N$ и $M \xrightarrow{1} N$

2) Ако $MN \xrightarrow{1} P$, то или а) $P \equiv M'N'$, $M \xrightarrow{1} M'$, $N \xrightarrow{1} N'$

б) $M \equiv \lambda_x Q$, $P \equiv Q'[x \mapsto N']$, $Q \xrightarrow{1} Q'$, $N \xrightarrow{1} N'$

д-во: Индукция по λ-термовете (Δ).

Лем 3. $\xrightarrow{1}$ изпълнява свойството на ◇.

д-во: Индукция по $M \xrightarrow{1} M_1$

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ M_1 \arrow[dr, "1"'] & & M_2 \arrow[dl, "1"] \\ & \exists M_3 & \end{tikzcd}$$

1) $M \equiv M_1$

Полагаме $M_3 \equiv M_2$

$$\begin{tikzcd} M \equiv M_1 \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ M_1 \arrow[d, "1"'] & M_2 \arrow[dl, equal] \\ M_3 & \end{tikzcd}$$

2) $M \equiv \lambda_x P$ $\quad P \xrightarrow{1} P_1 \xrightarrow{1} P_3$

$M_1 \equiv \lambda_x P_1$ $\quad P \xrightarrow{1} P_2 \to P_3$

~~И.П.~~ Лема 2, 1) $M \equiv \lambda_x P \xrightarrow{1} M_2$

$M_2 \equiv \lambda_x P_2$, $P \xrightarrow{1} P_2$

$$\begin{tikzcd} & \lambda_x P \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ \lambda_x P_1 \arrow[dr, "1"'] & & \lambda_x P_2 \arrow[dl, "1"] \\ & \exists M_3 \equiv \lambda_x P_3 & \end{tikzcd}$$

3) $M \equiv PQ$

$M_1 \equiv P_1 Q_1$ $\quad P \xrightarrow{1} P_1$ $\quad Q \xrightarrow{1} Q_1$

Знаем, че $M \equiv PQ \xrightarrow{1} M_2$. По лем 2-2)

а) $M_2 \equiv P_2 Q_2$, $P \xrightarrow{1} P_2$ $\quad Q \xrightarrow{1} Q_2$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] \arrow[d, phantom, "\text{И.П.}"] & \\ P_1 \arrow[dr, "1"'] & {} & P_2 \arrow[dl, "1"] \\ & P_3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] \arrow[d, phantom, "\text{И.П.}"] & \\ Q_1 \arrow[dr, "1"'] & {} & Q_2 \arrow[dl, "1"] \\ & Q_3 & \end{tikzcd}$$

$M_3 := P_3 Q_3$

$$\begin{tikzcd} & PQ \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\ P_1 Q_1 \arrow[dr, "1", "3)"'] & & P_2 Q_2 \arrow[dl, "1"', "3)"] \\ & P_3 Q_3 & \end{tikzcd}$$

deg.egov.bg/LP/ — ~~тех~~ шаблони за Vision

- Приоритизация на изисквания
- Стабилност на дадено изискване

Vision:
- обхват
- какъв проблем се решава?
- кои са участниците?

! Всичко с всичко

Stakeholders:
-

Scope:
-

Утре:
8:30 пред офиса

(14) λ-смятане

hw. Lem 4: $\xrightarrow{\beta} \subseteq \xrightarrow{1} \subseteq \twoheadrightarrow_{\beta}$

1) $M \twoheadrightarrow_{\beta} N \Rightarrow M \xrightarrow{1} N$

2) $M \xrightarrow{1} N \Rightarrow M \twoheadrightarrow_{\beta} N$

Th. (Чърч-Росер) $\twoheadrightarrow_{\beta}$ е конфлуентна.

Д-во: $\twoheadrightarrow_{\beta} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T} = (\xrightarrow{1})^{R,T}$, ~~тогава~~

~~по лема 0,~~ т.е.

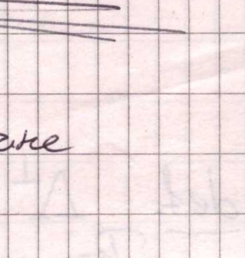
$Л3 \Rightarrow \xrightarrow{1}$ е $\Diamond \xRightarrow{Л0} (\xrightarrow{1})^{R,T}$ е $\Diamond$

$\| $

$\twoheadrightarrow_{\beta}$

Lem 0. R е $\Diamond$, то $R^{R,T}$ е $\Diamond$

Д-во:



Следствия:

1) $M =_\beta N \Rightarrow \exists R (M \twoheadrightarrow_\beta R \twoheadleftarrow_\beta N)$

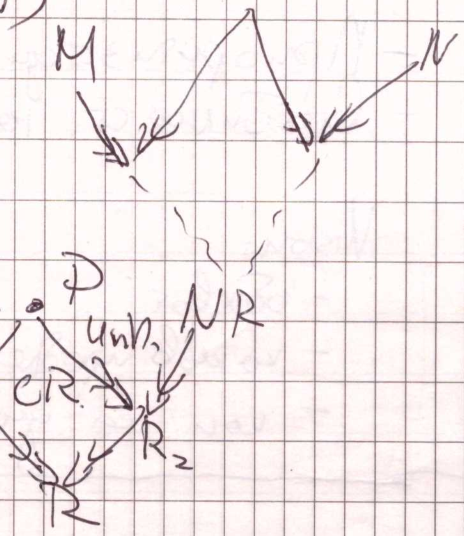
д-во: Инд. по $M =_\beta N$, $=_\beta \; := (\rightarrow_\beta)^{R,S,T}$

Б) $M \to_\beta N$, $R := N$ ✓

R) $M \equiv N \Rightarrow R := M$ ✓

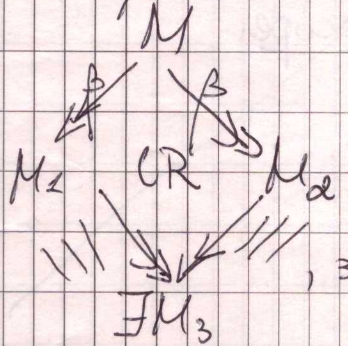
T) $\exists P (M =_\beta P \wedge N =_\beta P)$ по И.П.

S) $N =_\beta M$ по И.П. $\exists R (M \twoheadrightarrow_\beta R,\ N \twoheadrightarrow_\beta R)$



2) Всеки терм има най-много 1 нормална форма.

д-во:



M_1 е н.ф.

M_2 е н.ф.

, защото $M_1 \not\to_\beta$ $M_2 \not\to_\beta$

$M_1 \equiv M_2 \equiv M_3$

Стратегии за редукции

def. $\Lambda^\perp = \Lambda \cup \{\perp\}$

Разглеждаме $F: \Lambda^\perp \to \Lambda^\perp$; F наричаме едностъпкова стратегия за редукция, ако:

1) $F(\perp) \equiv \perp$

2) ~~F(M)~~ Ако $M \not\to_\beta \Rightarrow F(M) = \perp$

3) M не е в н.ф. $\Rightarrow M \to_\beta F(M)$

твърдение: Всеки Λ терм се намира в точно един от сл. видове:

1) $\lambda \vec{x}.\, y \vec{M}$ (главна н.ф.)

2) $\lambda \vec{x}.\, \underbrace{(\lambda y. P) Q}_{\text{главен редекс}} \vec{M}$

Упр. д-во

NR: (нормална страт. за редукц.) $\qquad \lambda_{\vec{x}}\, y \vec{M}$

1) $NR(x) := \bot$ $\qquad \lambda_{\vec{x}} (\lambda_y P) Q \vec{M}$

2) $NR(\lambda_x M) := \begin{cases} \bot & , NR(M) = \bot \\ \lambda_x NR(M) & , \text{иначе} \end{cases}$

3) $NR((\lambda_y P) Q) := P[y \mapsto Q]$ (изп. I-вия редекс, който видим)

4) $NR(M\, N) := \begin{cases} NR(M)\, N & , NR(M) \neq \bot \\ M[NR(N)] & , NR(N) \neq \bot, \text{но } NR(M) = \bot \\ \bot & , NR(M) = NR(N) = \bot \end{cases}$

hw. док., че NR е страт. за редукция; док., че NR редуцира най-левия най-външен редекс.

AR: (апликативна страт. за редукц.)

1) $AR(x) := \bot$

2) $AR(\lambda_x M) := \begin{cases} \bot & , AR(M) = \bot \\ \lambda_x AR(M) & , \text{иначе} \end{cases}$

3) $AR(MN) := \begin{cases} [AR(M)]N & , AR(M) \neq \bot \\ M[AR(N)] & , AR(M) = \bot, AR(N) \neq \bot \\ P[x \mapsto N] & , AR(M) = \bot, AR(N) = \bot, M \equiv \lambda_x P \\ \bot & , \text{иначе} \end{cases}$

hw. док. че AR е страт. за редукц.; док. че AR редуцира най-левия, най-вътрешен редекс

Теорема за нормализацията (на Curry):

Ако M има н.ф., то $\exists M_1, \ldots, M_n$ и $M_{i+1} \equiv NR(M_i)$
$\qquad \overset{\shortparallel}{M} \qquad M_n \not\xrightarrow{\beta}$

$AR(KI\Omega) \overset{= KI\Omega}{\equiv} AR(KI) = \bot \quad AR(\Omega) \qquad NR(KI\Omega) \equiv (\lambda_y I)\Omega$

$\qquad AR(K) = \bot \qquad \overset{\shortparallel}{\Omega} \qquad NR(KI) \equiv \lambda_y I$

$NR((\lambda_y I)\Omega) \equiv I$

$NR(I) \equiv \bot$

---

def. извикване по име

$CBN(x) := \bot \qquad CBN(\lambda_x M) := \bot$ (не оцен. λ) $\qquad CBN((\lambda_y P) Q) := P[y \mapsto Q]$

$CBN(MN) := \begin{cases} (CBN(M))N & , CBN(M) \neq \bot \\ M(CBN(N)) & , CBN(M) = \bot, CBN(N) \neq \bot \\ \bot & , \text{иначе} \end{cases}$

аналог. извикване по ст-ст CBV чрез AR.

def. (λ-определимост) $f: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$; f е λ-опр. с терма F, ако:

1) F е комб.

2) $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ и $f(\vec{x}) \simeq y \Rightarrow M c_{x_1} \ldots c_{x_n} \xrightarrow{\beta} c_y$

3) $f(\vec{x})$ не е деф. ($x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$), то $M c_{x_1} \ldots c_{x_n} \not\xrightarrow{\beta}$

th. λ-определими ф-ии са точно изчислимите ф-ии.

($\Leftarrow$) сим. МТ, която изч. f, чрез YF

($\Rightarrow$) МТ, която изч. NR

- дните са на БГ в писма-а
- В книгите, говори за себе си.
-

Cold emails.

- <u>follow up:</u>
  - 1 week × 1
  - 3 days × 2

Subject lines:
- Action-oriented - verbs
- Personalized
- Timeliness
- Adding value:
  "Hi {name}! I noticed you seek talented devs"

Be confident, not rude.
Research thy Person / Company

Body:
- why <u>them</u>? Personal
-

Personal info:
<u>3 related things in 3 mins</u>

AIDA:
Attention - grabbing Subject
Interest - Tell story about how can you help them
Desire - list benefits and tell why they're important
Action - overly specific.

Formulas:
- Before - After - Bridge
- Problem - Agitate - Solve
- But You Are Free
- Star - Chain - Hook :/
- Attention - Interest - Desire - Action
- Star - Story - Solution
- Reader's Digest Model
- Brevity - Blunt - Basic
- Praise - Picture - Push

- Don't make assumptions
- Don't dive right into the pitch

def. ρ по-общ от σ, ако $\exists \xi : \rho\xi = \sigma$

пр.: $\alpha \Rightarrow \alpha$, по-общ от $(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$

$(\alpha \Rightarrow \alpha)[\alpha \mapsto \alpha \Rightarrow \beta] = (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$

страница 16.2

--- минало е време ---

НАМИРА СЕ НА 16.2 ÷

hw. $\forall n \vdash c_n : (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$

Тв. $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$, $x \notin FV(M) \Rightarrow \Gamma \vdash M : \tau$

д-во: индукция по $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$

1) $M \equiv y$, $y : \tau \in \Gamma, x : \rho$

1.1) $x \neq y \Rightarrow y : \tau \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash y : \tau$

1.2) $x = y \Rightarrow y : \tau \in \Gamma, y : \rho \Rightarrow \tau \equiv \rho \Rightarrow \cancel{\Gamma \vdash y : \tau}$

и $x \notin FV(M)$ ↯

2) $M \equiv (M_1 M_2)$ $\Rightarrow$

$\Gamma, x : \rho \vdash (M_1 M_2) : \tau$

$\Gamma, x : \rho \vdash M_1 : \sigma \Rightarrow \tau$; $\Gamma, x : \rho \vdash M_2 : \sigma$

$x \notin FV(M) \Rightarrow x \notin FV(M_1 M_2) \Rightarrow x \notin FV(M_1) \cup FV(M_2)$

$\overset{\text{и.п.}}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash M_1 : \sigma \Rightarrow \tau$, $\Gamma \vdash M_2 : \sigma$

$\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash (M_1 M_2) : \tau$

3) ~~$M \equiv (\lambda_x M')$; $\tau = (\tau[\tau \mapsto \rho \Rightarrow \sigma]$~~ $M \equiv \lambda_y M'$

3.2) $x \neq y$ ~~$\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$~~ ~~$\tau[\tau \mapsto$~~

~~$\Rightarrow \Gamma, x : \rho \vdash \lambda_x M' : \rho \Rightarrow \sigma$~~

$\Gamma, x : \rho \vdash \lambda_y M' : \tau$ ~~$[\tau \mapsto \sigma \Rightarrow \gamma]$~~

$\Gamma, x : \rho, y : \tau_1 \vdash M' : \tau_2$ $\quad \tau = \tau_1 \Rightarrow \tau_2$

$FV(M) = FV(N) \setminus \{y\}$

$\Rightarrow x \notin FV(M)$, но $x \notin FV(N)$

$\overset{\text{и.п.}}{\Longrightarrow} \Gamma, y : \tau_1 \vdash M' : \tau_2$

$\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \Gamma \vdash \lambda_y M' : \tau_1 \Rightarrow \tau_2$

3.1) $x = y$

$\Gamma, x : \rho \vdash \lambda_x N : \tau$

$\Gamma, x : \rho, x : \tau_1 \vdash N : \tau_2$

само ако $\rho = \tau_1$

$$\frac{\Gamma, x : \tau_1 \vdash N : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda_x N : \tau_1 \Rightarrow \tau_2}$$

(16) λ-смятане

I: $$\frac{x:\alpha \vdash x:\alpha}{\vdash \lambda_x : \alpha \Rightarrow \alpha}$$

K: $$\frac{\dfrac{x:\alpha,\ y:\beta \vdash x:\alpha}{x:\alpha \vdash \lambda_y x : \beta \Rightarrow \alpha}}{\vdash \lambda_{x,y} x : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha}$$

$C_1 \equiv \lambda_{f,x} f\, x : (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{f:\alpha\Rightarrow\beta,\ x:\alpha \vdash f:\alpha\Rightarrow\beta \ ;\ f:\alpha\Rightarrow\beta,\ x:\alpha \vdash x:\alpha}{f:\alpha\Rightarrow\beta,\ x:\alpha \vdash f\,x:\beta}}{f:\alpha\Rightarrow\beta \vdash \lambda_x f\,x : \alpha\Rightarrow\beta}}{\vdash \lambda_{f,x} f\,x : (\alpha\Rightarrow\beta)\Rightarrow\alpha\Rightarrow\beta}$$

$C_0 \equiv K^* \equiv \lambda_{f,x}\, x : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \beta$

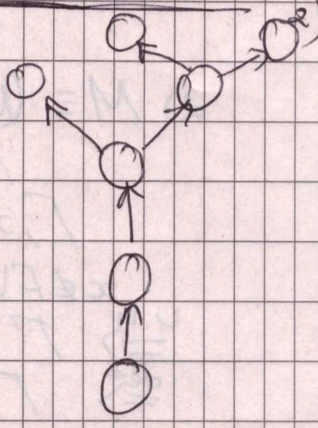
$C_2 = \lambda_{f,x} f(f\,x) : (\alpha \Rightarrow \cancel{\alpha}) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha \Rightarrow \cancel{\alpha}\ \beta$

$\alpha \Rightarrow \alpha\ \cancel{\Rightarrow \beta}$

$\Gamma = \{ f : \alpha \Rightarrow \alpha,\ x : \alpha \}$ $\quad \Gamma \vdash^{1)} f : \alpha \Rightarrow \alpha \ ;\ \Gamma \vdash^{1)} x : \alpha$

$$2)\ \frac{\Gamma \vdash^{1)} f : \alpha \Rightarrow \alpha,\ \Gamma \vdash^{2)} f(x) : \alpha}{\Gamma \vdash f(f\,x) : \alpha}$$

$$3)\ \frac{f : \alpha \Rightarrow \alpha \vdash \lambda_x f(f\,x) : \alpha \Rightarrow \alpha}{\vdash \lambda_{f,x} f(f\,x) : (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha}$$



$C_3 : (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$

def. (Типова субституция)
$\xi : TV \to T$ $\quad$ dom ξ е краен

ξ над τ

def. (Прилагане на ξ) Нека $\tau \in T$, а $\xi : TV \to T$. Деф. $\tau\xi$

1) $\tau \equiv \alpha$ $\quad$ 1.1) $\alpha \in \mathrm{dom}\,\xi \Rightarrow \alpha\xi := \xi(\alpha)$
$\qquad\qquad$ 1.2) $\alpha \notin \mathrm{dom}\,\xi \Rightarrow \alpha\xi := \alpha$

2) $\tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$ $\quad (\rho \Rightarrow \sigma)\xi := \rho\xi \Rightarrow \sigma\xi$

Нотация: $\mathrm{dom}\,\xi = \{\alpha\} \Rightarrow \xi = [\alpha \mapsto \xi(\alpha)]$ $\quad$ пр.: $[\alpha \mapsto \beta \Rightarrow \gamma]$

def. Типова релация ($\vdash$) **!** $\Gamma \vdash M:\tau$ (контекст св. с типово изр.)

1) $x:\tau \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash x:\tau$ (променлива)
2) $\Gamma \vdash M:\rho \Rightarrow \sigma,\ \Gamma \vdash N:\rho \Rightarrow \Gamma \vdash (MN):\sigma$ (апликация)
3) $\Gamma, x:\rho \vdash M:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash \lambda_x M:\rho \Rightarrow \sigma$ (абстракция)

Ако $\Gamma = \emptyset$ пишем „$\vdash M:\tau$".

пр.: ① $I:\alpha \Rightarrow \alpha$ I) 1) $\Gamma = \{x:\alpha\}$ $\Gamma \vdash x:\alpha$

II) 3) $\vdash \lambda_x x : \alpha \Rightarrow \alpha$

② $K:\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ ~~– 1) $x:\alpha, y:\beta \vdash y:\beta$ $x:\alpha$~~

~~1) $x:\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha), y:\beta \Rightarrow \alpha$ – 3) $y:\beta \vdash \lambda_y y$ $\lambda_x x:\alpha \Rightarrow \alpha$~~

~~– 1) $x:\alpha \vdash x:\alpha$~~

~~1) $x:\alpha, y:\beta\ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ $y:\beta \Rightarrow \alpha, x:\alpha \vdash x:\alpha$~~

~~$z:\beta \Rightarrow \alpha$~~

$\Gamma = \{x:\alpha, y:\beta\}$

$\Gamma \vdash x:\alpha$ ~~$\Gamma \vdash x:\alpha, x:\alpha \vdash \lambda_y x:\beta \Rightarrow \alpha$~~

$x:\alpha \vdash \lambda_y x:\beta \Rightarrow \alpha$

$\vdash \lambda_x(\lambda_y x):\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

② $K:\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

$\Gamma = \{x:\alpha, y:\beta\};\ \Gamma \vdash x:\alpha$

$x:\alpha \vdash \lambda_y x:\beta \Rightarrow \alpha$

$\vdash \lambda_x(\lambda_y x):\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$

Като дървета (типов извод)

1) $\Gamma \vdash x:\alpha,\ x \in \Gamma$ (листа)

2)
$$\frac{\overset{\nabla}{\Gamma \vdash M:\rho \Rightarrow \sigma},\quad \overset{\nabla}{\Gamma \vdash N:\rho}}{\Gamma \vdash (MN):\sigma}$$

3)
$$\frac{\overset{\nabla}{\Gamma, x:\rho \vdash M:\sigma}}{\Gamma \vdash \lambda_x M:\rho \Rightarrow \sigma}$$

Типово λ-смятане

$TV = \{\alpha, \beta, \gamma, \rho, \sigma, \dots\}$ – изброимо, безкрайно мн-во от типови променливи

<u>Тип</u> 1) $\alpha \in TV \Rightarrow \alpha \in T$ (базови типове)

2) $\rho, \sigma \in T \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \in T$ (функции)

арг. резулт.

$\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau \rightarrow \rho \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \tau) \not\equiv (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \tau$

статично		динамично
expl.	imp.	JS
Java	Haskell	~~Java~~ Perl
C++		Scheme

Curry / Church

<u>def.</u> Типово съждение – $M : \tau$, $M \in \Lambda$, $\tau \in T$ „M е от тип τ"

- Какво означава програма да има тип?
- Може ли програма да няма тип?
- Може ли да има повече от един тип? ✓ $\lambda_x x : \rho \Rightarrow \rho, \rho \in T$
- Може ли с програма да сметнем типа на терм?

<u>def.</u> (Типов контекст) Нека Γ е <u>крайна</u> редица от типови съждения от вида $x : \rho$ → допускане, като всички промен-ливи в Γ са различни. (алтернативно, Γ е крайна ф-я от мн-во от пром. в типове – $\Gamma : V \rightarrow T$; dom Γ е крайно)

<u>пр.:</u> $\Gamma = \{x : \alpha;\ y : \beta \Rightarrow \alpha;\ z : \gamma\}$

λ-смятане (16.2)

def. τ е НОУ на ρ и σ, ако:

1) $\tau \geq \rho$ и $\tau \geq \sigma$

2) $\forall \tau' : \tau' \geq \rho, \ \tau' \geq \sigma \Rightarrow \tau \geq \tau'$ (най-общ)

пр. $\tau_0 : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \beta$

$\tau_1 : (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \beta$

НОУ(τ_0, τ_1)

$\tau_0 \equiv \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \beta$

$\tau_2 \equiv (\gamma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \tau)$

$[\alpha \mapsto \delta \to \delta, \beta \mapsto \gamma, \gamma \mapsto \delta]$

$\tau \equiv (\delta \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\delta \Rightarrow \delta) \geq \tau_2$

$\tau_2 \geq \tau$ т.е $\tau_2 \geq \tau_0$ и $\tau_2 \geq \tau_1$

?

тв. (монотонност на контекст)

$$\Gamma \subseteq \Delta, \ \Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow \Delta \vdash M : \tau$$

д-во: Индукция по $\Gamma \vdash M : \tau$, $\forall \Delta (\Gamma \subseteq \Delta)$

1) $\underset{M}{\overset{|||}{x}} : \tau \in \Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow x : \tau \in \Delta \Rightarrow \Delta \vdash x : \tau$

2) $M \equiv M_1 M_2$, $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \tau$, $\Gamma \vdash M_2 : \rho$

$\Downarrow$ и.п. $\qquad \Downarrow$ и.п.

$$\frac{\Delta \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \tau; \ \Delta \vdash M_2 : \rho}{\Delta \vdash \underset{M}{\underset{|||}{(M_1 M_2)}} : \tau}$$

3) $M \equiv \lambda_x N$, $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$ $\qquad \tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$

$\Downarrow$ и.п.

$\Delta, x : \rho$ е валиден св.

3.1) $x : \sigma \notin \Delta$ и $\Gamma, x : \rho \subseteq \Delta, x : \rho$

$$\Rightarrow \frac{\Delta, x : \rho \vdash N \sigma}{\Delta \vdash \underbrace{\lambda_x N}_{M} : \underbrace{\rho \Rightarrow \sigma}_{\tau}}$$

3.2) $x : \sigma \in \Delta$ за $\Delta' := \Delta \setminus \{x : \sigma\}$

Твърдим, че $\Delta' \geq \Gamma$

$$x : \sigma \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \subseteq \Delta' \overset{\text{и.п.}}{\Longrightarrow} \frac{\dfrac{\Delta', x : \rho \vdash N : \sigma}{\Delta' \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}}{\Delta \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

тв. (св-во на свободните променливи)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow FV(M) \subseteq dom\,\Gamma$

д-во: Индукция

1) $M \equiv x,\ x : \tau \in \Gamma \Rightarrow x \in dom\,\Gamma \Rightarrow \{x\} \subseteq dom\,\Gamma$

~~но~~ $FV(x) = \{x\} \subseteq dom\,\Gamma$

2) $M \equiv (M_1 M_2) \overset{def}{\Rightarrow} \dfrac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \tau,\quad \Gamma \vdash M_2 : \tau}{}$

$\Downarrow$ и.п. $\qquad\qquad \Downarrow$

$FV(M_1) \subseteq dom\,\Gamma \qquad FV(M_2) \subseteq dom\,\Gamma$

$\overset{def}{\Rightarrow} FV(M) = FV(M_1) \cup FV(M_2) \subseteq dom\,\Gamma$

3) $M \equiv \lambda_x N \overset{def}{\Rightarrow} \Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma,\quad \tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$

$\overset{и.п.}{\Rightarrow} FV(N) \subseteq dom\,\Gamma \cup \{x\}$

$FV(M) = FV(N) \setminus \{x\}$ ~~$\subseteq dom(\Gamma) \cup \{x\}$~~

$\Rightarrow FV(M) \subseteq dom\,\Gamma \cup \{x\} \setminus \{x\}$

$\Rightarrow FV(M) \subseteq dom\,\Gamma$ ■

def. ~~dom Γ~~ : $\Gamma = \{x_0 : \sigma_0, \dots, x_n : \sigma_n\}$ (вета от Lambda Calculi w/ Types) H.P. Barendregt

1) $dom\,\Gamma = \{x_0, \dots, x_n\}$; $\sigma_i = \Gamma(x_i)$ – Γ е частична ф-я

2) V_0 – променливи, то $\Gamma \upharpoonright V_0 = \{x : \sigma \mid x \in V_0 \wedge \sigma = \Gamma(x)\}$

3) $\sigma, \tau \in T$, $\sigma[\alpha := \tau]$ показва субституция

<u>def</u>. $\Gamma \upharpoonright X = \{x:\rho \mid x:\rho \in \Gamma, x \in X\}$

hw

<u>следствие</u>: $\Gamma \vdash M:\tau$, то $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M:\tau$

В частност, ако $\Gamma \vdash M:\tau$, $FV(M) = \emptyset \Rightarrow \vdash M:\tau$

<u>lem</u>. (за обръщането – generation lemma)

1) Ако $\Gamma \vdash x:\sigma$, то $x:\sigma \in \Gamma$

2) Ако $\Gamma \vdash (MN):\sigma$, то $\exists \rho \in T\,(\Gamma \vdash M:\rho \Rightarrow \sigma,\ \Gamma \vdash N:\rho)$

3) Ако $\Gamma \vdash \lambda_x M:\tau$, то $\exists \rho, \sigma \in T\,(\rho \Rightarrow \sigma = \tau;\ \Gamma, x:\rho \vdash M:\sigma)$

hw

<u>следствие</u>. Ако $\Gamma \vdash M:\tau$, $N \leq M \Rightarrow \exists \rho\,(\Gamma \vdash N:\rho)$.

(д-во с инд. по деф. на подтерм)

hw

<u>lem</u>. (за субституцията)

1) $\Gamma \vdash M:\tau$, то $\Gamma\xi \vdash M:\tau\xi$ (за произв. субст. ξ)

2) $\Gamma, x:\rho \vdash M:\sigma$ и $\Gamma \vdash N:\rho$, то $\Gamma \vdash M[x \mapsto N]:\sigma$

(д-во с инд. по M)

<u>th</u>. (съгласуваност на типовете с $\xrightarrow{\beta}$)

Ако $\Gamma \vdash M:\tau$ и $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow \Gamma \vdash N:\tau$

<u>д-во</u>: С инд. по $\xrightarrow{\beta}$

$\xrightarrow{\beta} := \beta^{\lambda}$

β 1) $(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x \mapsto N]$

λ 2) $M \xrightarrow{\beta} N \Rightarrow MP \xrightarrow{\beta} NP$

$PM \xrightarrow{\beta} PN$

$\lambda_x M \xrightarrow{\beta} \lambda_x N$

! β) $M \equiv (\lambda_x P)Q$, $N \equiv P[x \mapsto Q]$

$\Gamma \vdash (\lambda_x P)Q:\tau$

$\overset{\text{ЛО}}{\Rightarrow} \exists \rho\,(\underline{\Gamma \vdash \lambda_x P:\rho \Rightarrow \tau},\ \Gamma \vdash Q:\rho)$

~~$\Gamma, x:\rho$~~

$\overset{\text{ЛО}}{\Rightarrow} \Gamma, x:\rho \vdash P:\tau \overset{\text{ЛС}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash P[x \mapsto Q]:\tau$

$\equiv N$

λ_1) $M \equiv M_1 P$ $\quad N \equiv N_1 P$, $M_1 \xrightarrow{\beta} N_1 \overset{\text{И.Х}}{\Rightarrow} \Gamma \vdash N_1:\rho \Rightarrow \tau$

$\Gamma \vdash M_1 P:\tau \overset{\text{ЛО}}{\Rightarrow} \exists \rho: \Gamma \vdash M_1:\rho \Rightarrow \tau,\ \Gamma \vdash P:\rho$

<u>hw</u>. (за нас) $\Rightarrow \Gamma \vdash N_1 P:\tau$

$\equiv N$

λ_2 и λ_3 са аналогични.

следствие: Ако $\Gamma \vdash M:\tau$, $M \overset{\beta}{\Rightarrow} N$, то $\Gamma \vdash N:\tau$

hw. $\Gamma \vdash M:\tau$, $M \overset{\beta}{\Leftarrow} N$? $\Gamma \vdash N:\tau$

контрапример: $\dfrac{M \overset{\beta}{\Rightarrow} N,\ \Gamma \vdash N:\tau}{\Gamma \nvdash M:\tau}$

най-общ тип

hw. $\Gamma \vdash M:\tau$, ~~то $\exists \rho (\Gamma \vdash M:\rho, \Gamma \vdash M:\sigma$~~

то $\exists \rho \geq \tau (\Gamma \vdash M:\rho, \Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow (\rho \geq \sigma))$

$\omega \equiv \lambda_x xx$

Доп., че $\Gamma \vdash \lambda_x xx:\tau$, $\overset{ЛО}{\Longrightarrow} \exists \rho, \sigma : \tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$

то $\Gamma / \emptyset \vdash \lambda_x xx:\tau$ $\quad \cancel{\Gamma}\ x:\rho \vdash xx:\sigma \quad \rho \equiv \rho' \Rightarrow \sigma$

$\overset{ЛО}{\Longrightarrow} \exists \rho' : \ x:\rho \vdash x:\rho' \Rightarrow \sigma$

и $x:\rho \vdash x:\rho' \Rightarrow \rho \equiv \rho'$ ↯

$\overset{ЛО}{\Longrightarrow}$ ~~$\rho \equiv \rho'$~~

Алгоритмични въпроси:

type check 1) Проверка на тип. Даден $M \in \Lambda$, $\tau : T$; Вярно ли е, че $\exists \Gamma, \Gamma \vdash M:\tau$ $(\vdash M:\tau ?)$

type inference 2) Типизируемост. Даден $M \in \Lambda$; Вярно ли е, че $\exists \Gamma, \exists \tau \in T, \Gamma \vdash M:\tau$ $(\vdash M: ?)$

3) Обитаемост. Даден $\tau \in T$; Вярно ли е, че $\exists \Gamma, \exists M \in \Lambda, \Gamma \vdash M:\tau$ $(\vdash ?:\tau)$

$S := \lambda_{x,y,z}\, xz(yz)$

$\alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \delta$

$\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \delta \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \delta$

$\gamma \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \delta \Rightarrow \gamma \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \gamma \Rightarrow \delta$

$(\gamma \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \delta) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \alpha_2) \Rightarrow \gamma \Rightarrow \delta$

<u>def.</u> (Обитаемост). $\tau \in T$ е обитаем, ако $\exists M, FV(M) = \emptyset$
$\Pi \vdash M : \tau$

<u>пр.:</u> $I : \alpha \Rightarrow \alpha$
$K : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \alpha$
$K^{*} : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \beta$
$C_n : (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha)$ ч. сл. на $\beta = \beta$

<u>пр.:</u> необитаем:
$\alpha \in TV$ - няма терм, който да връща всеки тип
$(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha$
$(\beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$

~~$p := \lambda_{x,y}$~~ $\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta$ $\quad \alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \gamma$
$p := \lambda_{x,y}\, yx$ $\quad p3 := \lambda_{x,y,z}\, z(yx)$

Типизиране в стил Чърч

	Curry	Church
експл.	дом.	✓сега
импл.	✓досук	✗

<u>def.</u> (Λ^T) типово λ-смятане в стил Church.
1) $x \in V$, $\tau \in T$, то $x^{\tau} \in \Lambda^T$
2) $M^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda^T$, $N^{\rho} \in \Lambda^T$, то $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma} \in \Lambda^T$
3) $x \in V$, $\rho \in T$, $M^{\sigma} \in \Lambda^T$, то $(\lambda_{x^{\rho}} M^{\sigma})^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda^T$

Конвенция: В 1 терм различните по тип променливи имат и различни имена.

$S := \left(\lambda_{x^{\nu \Rightarrow \nu \Rightarrow \delta}, y^{\nu \Rightarrow \nu}, z^{\nu}} \left((x^{\nu \Rightarrow \nu \Rightarrow \delta} z^{\nu})^{\nu \Rightarrow \delta} (y^{\nu \Rightarrow \nu} z^{\nu})^{\nu}\right)^{\delta}\right)^{\dots}$

Конвенция: Ще изпускаме типа, където се подразбира.

<u>def.</u> Изтриване на типовете (type erasure)

$$|\ |: \Lambda^T \to \Lambda$$

1) $|x^\tau| := x$
2) $\cancel{|M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho|}$ $|(M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma| := |M^{\rho\Rightarrow\sigma}|\,|N^\rho|$
3) $|\lambda_{x^\rho} M^\sigma| := \lambda_x |M^\sigma|$

hw. 1) Curry → Church
дадено: $\Gamma \vdash M:\tau,\ M\in\Lambda,\ \tau\in T,\ \Gamma$ - ctx
$\Rightarrow \exists N^\tau \in \Lambda^T, |N^\tau| = M$

2) Church → Curry
дадено: $M^\tau \in \Lambda^T$
$\Rightarrow \exists \Gamma$ - ctx, $\cancel{\exists N \in \Lambda : \Gamma \vdash N:\tau}$

$$\Gamma \vdash |M^\tau| : \tau \quad \text{и} \quad dom\,\Gamma = FV(|M^\tau|)$$

hw. Докажете, че η-редукцията е конфлуентна
$\lambda_x M x \xrightarrow{\eta} M$ (η-редукц. е силно нормал.)

$M \xleftarrow{\eta} \lambda_x M x \quad x \notin FV(M)$

hw. Докажете, че
$(\lambda_{x^\rho}(M^{\rho\Rightarrow\sigma} x^\rho)^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \xleftrightarrow{\eta} M^{\rho\Rightarrow\sigma}$ (η-експанзия)
е силно нормализираща в Λ^T

<u>def.</u> (слабо типизиран терм)
1) $x \in V$, то $x \in \Lambda^{wT}$
2) $M, N \in \Lambda^{wT}$, то $(MN) \in \Lambda^{wT}$
3) $x\in V,\ \tau \in T,\ M \in \Lambda^{wT}$, то $(\lambda_{x^\tau} M) \in \Lambda^{wT}$

тв. $M \in SN \iff M$ е силно нормализуем.

=>) $M \in SN$; ~~доп., че~~

Индукция по SN:

Доп., че $\forall N: M \to_\beta N$, $N \in SN$ и N е с.н.

Да доп., че M не е с.н., то $\exists M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \dots$

$M \to_\beta M_1$, то по И.П. M_1 е с.н. ↯

но постр. безкр. редица от редукции ↯

<=) M е с.н. Ще док., че $M \in SN$.

Доп., че $M \notin SN$. По деф. $\exists M_1 : M \to_\beta M_1, M_1 \notin SN$

Аксиома за зависим избор $\Rightarrow \exists M_2 : M_1 \to_\beta M_2, M_2 \notin SN$

По този начин можем да си постр. безкр. ред.

$M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta \dots$, което е в ↯.

Аксиома за избор: $\forall x \exists y A(x,y) \to \exists f \forall x A(x, fx)$

Аксиома за зав. избор:

$$\exists x A(0,x) \& \forall n (\exists x A(n,x) \to \exists x A(n+1,x)) \to \exists f A(n, fn)$$ ■

19 λ-смятане

def. (типизируемост в Λ^{wT})

Γ - контекст.

1) $\dfrac{}{\Gamma \vdash x : \tau} \; x : \tau \in \Gamma$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma, \;\; \Gamma \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash (MN) : \sigma}$

3) $\dfrac{\Gamma, x : \rho \vdash M : \sigma}{(\lambda x^{\rho} M) : \rho \Rightarrow \sigma}$

hw. Ако Γ - ctx; $M \in \Lambda^{wT}$; $\sigma, \tau \in T$

$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma, \;\; \Gamma \vdash M : \tau}{\sigma \equiv \tau}$ (уникално типизиране)

hw. $\| \; \| : \Lambda^{T} \to \Lambda^{wT}$

1) $\|x^{\tau}\| := x$; 2) $\|(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma}\| := \|M^{\rho \Rightarrow \sigma}\| \|N^{\rho}\|$

3) $\|(\lambda x^{\rho} M^{\sigma})^{\rho \Rightarrow \sigma}\| := \lambda x^{\rho} \|M^{\sigma}\|$

~~Th~~ Church $\leftrightarrow$ wT 1) $M^{\tau} \in \Lambda^{T}, \exists \Gamma : \Gamma \vdash \|M^{\tau}\| : \tau$

dom $\Gamma = FV(\|M^{\tau}\|)$

Теорема за силна нормализация на Λ^{T}

def. терм M^{τ} е силно нормализируем, ако $\nexists \; \underset{M^{\tau}}{M_0^{\tau}} \to_{\beta} M_1^{\tau} \to_{\beta} \dots$

Цел: док., че $\forall$ термове в Λ^{T} са силно нормализируеми.

def. (SN) Ако ~~$\forall M \to_\beta N$ знаем, че $N \in SN$, то $M \in SN$~~

$\forall M \to_{\beta} N$ знаем, че $N \in SN$, то $M \in SN$

Факти: 1) Ако M е в н.ф., то $M \in SN$

2) Ако $M \in SN$, $M \to_{\beta} N$, то $N \in SN$ (няма като за обр.)

def. M е силно норм. ако $\nexists\, M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \dots$ (20) λ-смятане
$M_0 = M$

~~факт.~~
SN: 1) Ако $\forall N \xleftarrow{\beta} M$ $N \in SN$, то $M \in SN$

факти: за SN
1) $M \in SN \iff M$ е силно нормализируем
2) M в н.ф., то $M \in SN$
3) $M \in SN$, то за $\forall N \xleftarrow{\beta} M$, $N \in SN$ (лема за обръщане)
4) ~~Нека $Mx \in SN$, тогава $M \in SN$~~
~~д-во: Индукция по SN~~
~~Нека за $\forall P \xleftarrow{\beta} Mx$, $P \in SN$~~
~~$A = \{M \in SN \mid N \in \Lambda\}$? $A \in SN$~~
~~$A = \{M \in \Lambda \mid Mx \in SN\}$? $A \in SN$~~
~~$Mx \in SN \overset{3)}{\Rightarrow} \forall P \xleftarrow{\beta} Mx, P \in SN$~~
~~т.е. Нека вземем произв. $N \xleftarrow{\beta} M$, ако док., че $N \in SN$, то $M \in SN$~~
~~$Mx \xrightarrow{\beta} Nx$, но $\forall P \xleftarrow{\beta} Mx$, $P \in SN \Rightarrow Nx \in SN$~~

4) $\forall P \in SN (\forall M \in \Lambda, x \in V: P \equiv Mx \rightarrow M \in SN)$
д-во: Индукция по $P \in SN$
$\forall Q \xleftarrow{\beta} P$, $Q \in SN$. Нека за Q е вярно 4).
Нека $M \in \Lambda$, $x \in V$ $P = Mx$. Цел: $M \in SN$
Достатъчно е да си вземем произв $N \xleftarrow{\beta} M$ и да док., че $N \in SN$

$$\underbrace{Mx}_{P} \xrightarrow{\beta} \underbrace{Nx}_{Q}$$

Тогава $Nx \in SN$ и по ИП за Nx е вярно 4), т.е. $N \in SN$.
по-кратко, $Mx \in SN$, то $M \in SN$

5) Нека $M_1, \dots, M_n \in SN$, $x \in V \Rightarrow x\vec{M} \in SN$
д-во: ~~Индукция по n:~~
~~1) $n = 0 \Rightarrow x$ прилагане над 0, но x в н.ф. $\Rightarrow x \in SN$~~
~~2) да док., че е вярно за $n > 0$, $M_{n+1} \in SN$~~
Цел: $x\vec{M} \in SN$, дост. е да изб. $P \xleftarrow{\beta} x\vec{M}$ и да видим, че $P \in SN$

не са редекси

$x M_1 \dots M_n M_{n+1} \xrightarrow{\beta} P$

1сл. $\exists k \in [1;n]$, $M_k \xrightarrow{\beta} M_k'$, ~~$P \equiv x M_1 \dots M_k' \dots M_n M_{n+1}$~~

д-во: Едновременна индукция по $M_1, \dots, M_n \in SN$

ИП: Ако за някое i $\forall N \xleftarrow{\beta} M_i$, $N \in SN$, то за това N ще е вярно тв. (което и M_i да си вземем и по $\xleftarrow{\beta}$ точки ще достигнем в SN, то ще е вярно тв.)

1.1 | . . . . $M_1 \in SN$

1.2 . . . . . $M_2 \in SN$

:

1.n) . . . . $M_n \in SN$

n инд. клаузи за SN^n

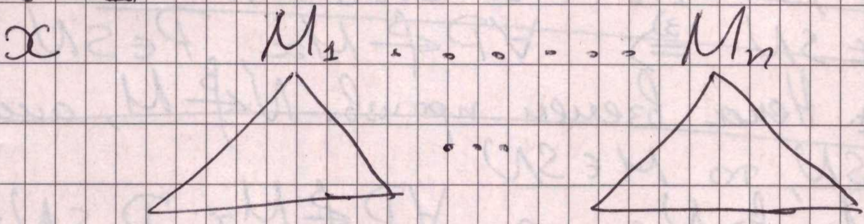
~~2 поиск. нещо в SN^n~~

За да видим, че $x\vec{M} \in SN$, трябва да си изберем произв. $P \xleftarrow{\beta} x\vec{M}$ и да видим, че $P \in SN$.

$P \equiv x M_1 \dots M_i' \dots M_n$, където $M_i \xrightarrow{\beta} M_i'$. Но $M_i \in SN \Rightarrow M_i' \in SN$

По И.П. за N на мястото на M_i ще е вярно тв.

$\Rightarrow P \in SN$. ■



Индукция, x прил. на д. крайни ~~редукция~~, дава всички комбинации крайни редукции, които са крайни.

б) lem: Нека $M, N, P_1, \dots, P_n \in SN$ и $M[x \mapsto N]\vec{P} \in SN$

тогава $(\lambda_x M) N \vec{P} \in SN$

д-во: Едновременна индукция по $M, N, \vec{P} \in SN$

ИП: Ако направи $\xrightarrow{\beta}$, за което и да е от тях, св-вото ще е вярно.

$Q \xleftarrow{\beta} (\lambda_x M) N \vec{P}$. Дост. е да видим, че $Q \in SN$

1) $\exists M' \xleftarrow{\beta} M$ $\quad Q \equiv (\lambda_x M') N \vec{P} \in SN$ $\quad M' \in SN$, ~~по ИП~~

~~$Q \xrightarrow{\beta}$~~ $M'[x \mapsto N] \vec{P} \in SN$, понеже знаем, че ~~НЕ~~ $M[x \mapsto N] \xrightarrow{\beta} M'[x \mapsto N]$, $M \xrightarrow{\beta} M'$

$\xRightarrow{\text{И.П.}} Q \in SN$

3') $M \in SN$ и $N \twoheadleftarrow^{\beta} M$, $N \in SN$ (инд. по $\twoheadleftarrow_{\beta}$ чрез 3') (21) λ-смятане

2 сл. $\exists N' \leftarrow_{\beta} N$ $Q \equiv (\lambda_x M) N' \vec{P}$. За да приложим И.П. трябва да видим, че $M[x \mapsto N]\vec{P} \in SN$

Но $N \beta N'$, то $M[x \mapsto N] \twoheadrightarrow_{\beta} M[x \mapsto N']$

И.П. По 3') $\Rightarrow$ ~~M'~~ $M[x \mapsto N']\vec{D} \in SN$

$\overset{\text{И.П.}}{\Longrightarrow} Q \in SN$

3 сл. $\exists i (P_i \to_{\beta} P_i') \Rightarrow Q \equiv (\lambda_x M) N P_1 \dots P_i' \dots P_n$

$\underset{SN}{M[x \mapsto N] P_1 \dots P_i \dots P_n} \to_{\beta} \underset{SN}{M[x \mapsto N] P_1 \dots P_i' \dots P_n}$

$\overset{\text{И.П.}}{\Longrightarrow} Q \in SN$

4 сл. $Q \equiv M[x \mapsto N]\vec{P} \in SN$ по условие.

Цел: $\Lambda^{T} = SN$

1) $SN \subseteq \Lambda^{T}$ по инд. деф. на SN

2) $? \Lambda^{T} \subseteq SN$

$SN^{\tau} = \{ M^{\tau} \mid M^{\tau} \in SN \}$

фалшиво д-во: инд. по Λ^{T}

1) $x \in \Lambda^{T}$, $x \in$ в.н.ф. $\overset{2)}{\Longrightarrow} x \in SN$ ✓

3) $M \in \Lambda^{T}$, $M \in SN$ $\lambda_x M \in SN$

Да вземем $P \leftarrow_{\beta} \lambda_x M \overset{\text{по}}{\Longrightarrow} P \equiv \lambda_x M'$ $M \to_{\beta} M'$

$\Rightarrow M' \in SN \Rightarrow \lambda_x M' \in SN$

2) $M, N \in \Lambda^{T}$ и $M, N \in SN$. Искаме $MN \in SN$

$P \leftarrow_{\beta} MN$ проблем

def. SC^{τ} (strongly computable)

1) $SC^{\alpha} := SN^{\alpha}$

2) $SC^{\rho \Rightarrow \sigma} := \{ M^{\rho \Rightarrow \sigma} \mid \forall N^{\rho} \in SC^{\rho} ((MN)^{\sigma} \in SC^{\sigma}) \}$

справение: $SC \subseteq SN \subseteq \Lambda^{T} \subseteq SC \subseteq SN$

Лем 1: I) $SC^\tau \subseteq SN^\tau$

II) $x^\tau \in SC^\tau$

д-во: Индукция по τ:

1) $\tau = \alpha$: I) $SC^\alpha \overset{def}{=} SN^\alpha$ ✓

II) $x^\alpha \in SN^\alpha \overset{def}{=} SC^\alpha$ ✓

2) $\tau = \rho \Rightarrow \sigma$ I) $M^{\rho \Rightarrow \sigma} \in SC^{\rho \Rightarrow \sigma}$. Искаме $M \in SN^{\rho \Rightarrow \sigma}$

$\forall N^\rho \in SC^\rho (MN \in SC^\sigma)$. По $\overset{и.п.}{\rho}$ II) за ρ $x^\rho \in SC^\rho$

$\Rightarrow (Mx)^\sigma \in SC^\sigma \underset{и.п.^\sigma I}{\subseteq} SN^\sigma$

$\overset{4)}{\Rightarrow} M \in SN$ ■

II) ~~Нека~~ Искаме да док, че $x^{\rho \Rightarrow \sigma} \in SC^{\rho \Rightarrow \sigma}$

Нека $M \in SC^\rho$. Искаме $xM^\rho \in SC^\sigma$. (Искаме да стигнем до 1) на SC)

$\Downarrow$ и.п.$^\rho$I

$M \in SN^\rho \overset{5)}{\Rightarrow} (xM)^\sigma \in SN^\sigma$

Нека $\tau \equiv \rho_1 \Rightarrow \rho_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \rho_n \Rightarrow \alpha$

$x^\tau \in SC^\tau \iff \underset{\in SC^{\rho_1}}{\forall M_1} (xM_1)^{\rho_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha} \in SC^{\rho_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \rho_n \Rightarrow \alpha}$

$\iff \forall M_1 \in SC^{\rho_1}, M_2 \in SC^{\rho_2} (xM_1M_2)^{\rho_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha} \in SC^{\rho_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha}$

$\iff \ldots \iff \forall M_1 \in SC^{\rho_1}, \ldots, M_n \in SC^{\rho_n} (x\vec{M})^\alpha \in SC^\alpha$

Да си вземем $M_1 \in SC^{\rho_1}, \ldots, M_n \in SC^{\rho_n}$. Цел. $x\vec{M} \in SC^\alpha = SN^\alpha$

$M_1 \in SN^{\rho_1}$ (и.п.$^{\rho_1}$I), …, $M_n \in SN^{\rho_n}$ (и.п.$^{\rho_n}$I)

$\overset{5)}{\Longrightarrow} x\vec{M} \in SN^\alpha = SC^\alpha$. ■

$SN \underset{\checkmark}{\subseteq} \underbrace{\Lambda' \subseteq SC}_{\text{лем+def.}} \underset{\checkmark}{\subseteq} SN$

Лем 2: Ако $M, N, P_1, \ldots, P_n \in SN$ и $M[x \mapsto N]\vec{P} \in SC^\tau$

то $(\lambda x M)N\vec{P} \in SC^\tau$

д-во: Инд. по типовете:

1. сл. $\tau \equiv \alpha \overset{6)}{\Longrightarrow}$, защото $SN^\alpha = SC^\alpha$

2 сл. $\tau \equiv \rho \Rightarrow \sigma$. Цел. $(\lambda x M)N\vec{P} \in SC^{\rho \Rightarrow \sigma}$

Нека $Q \in SC^\rho$. Цел $(\lambda x M)N\vec{P}Q \in SC^\sigma$

Да разгл. $\Big(\big(\underbrace{M[x \mapsto N]\vec{P}}_{\in SC^{\rho\Rightarrow\sigma}}\big)^{\rho\Rightarrow\sigma} \underbrace{Q^\rho}_{\in SC^\rho}\Big)^\sigma \overset{def.}{\Rightarrow} \in SC^\sigma$ (22) λ-смятане

$\overset{\text{И.П.}}{\Longrightarrow} (\lambda_x M) N \vec{P} Q \in SC^\sigma$ ■

def. (субституция) $\xi : V^\tau \to \Lambda^\tau$

def. (прилагане на субст.): 1) $x^\tau \xi := \begin{cases} \xi(x), & \text{ако е деф.} \\ x^\tau, & \text{иначе} \end{cases}$

2) $(M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma \xi := \big((M^{\rho\Rightarrow\sigma}\xi)^{\rho\Rightarrow\sigma} (N^\rho \xi)^\rho\big)^\sigma$

3) $(\lambda_{x^\rho} M^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \xi := \big(\lambda_{x^\rho}(M^\sigma \xi^{x^\rho}_{x^\rho})^\sigma\big)^{\rho\Rightarrow\sigma}$

където $\xi^{M^\rho}_{x^\rho}(y^\sigma) := \begin{cases} x^\rho \equiv y^\sigma \Rightarrow M^\rho \\ \text{иначе} \Rightarrow \xi(y^\sigma) \end{cases}$

def. (силно изчислима субст.) Казваме, че ξ е силно изчислима ако за $\forall x (\xi(x) \in SC)$. range $\xi \subseteq SC$

lem 3: Ако ξ е силно изчислима, то $M^\tau \xi$ е силно изчислима

д-во: Индукция по ~~прила~~ $M\xi$ (по-точно, по M)

1сл. $M \equiv x$ 1.1) $\xi(x)$ е деф. $\Rightarrow M\xi = x\xi = \xi(x) \in SC$

1.2) $\xi(x)$ не е деф. $\Rightarrow x\xi = x \in SC$ (lem 1.2)

2сл. $M \equiv M_1 M_2$, то $M_1^{\rho\Rightarrow\sigma} M_2^\rho \xi \overset{def.}{\equiv} (M_1\xi)(M_2\xi)$. По ИП $M_1\xi \in SC^{\rho\Rightarrow\sigma}$, $M_2\xi \in SC^\rho$

$\Rightarrow M_1 M_2 \in SC^\sigma$

3сл. $M^{\rho\Rightarrow\sigma} \equiv \lambda_{x^\rho} N^\sigma$. По def. $(\lambda_{x^\rho} N^\sigma)\xi \equiv \big(\lambda_{x^\rho}(N\xi^x_x)\big)^\sigma$

Искаме $\lambda_{x^\rho}(N^x_x \xi)^\sigma \in SC^{\rho\Rightarrow\sigma}$

Нека $P \in SC^\rho$, иска: $\big(\lambda_{x^\rho}(N^x_x\xi)^\sigma\big)P \in SC^\sigma$

Ще изп. lem 2 3.1) $P \in SN$: $P \in SC^\rho \underset{lem 1.1}{\subseteq} SN$ ✓

3.2) $N\xi^x_x \in SN$, $N\xi \in SC$ (ξ е с.ч.), но ξ^x_x е с.изч.

$\Rightarrow N\xi^x_x \in SC^\sigma \subseteq SN$ ✓

3.3) $(N\xi^x_x[x \mapsto P]) \in SC^\sigma$

$|||$

$N\xi^P_x \in SC^\sigma$ ξ^P_x е с.ч.

Следствие. $\Lambda^T \subseteq SC$. Нека $M \in \Lambda^T$, $\xi := \emptyset$ с. 434.

$\overset{\text{Реш 3}}{\Longrightarrow} M\xi \in SC$

$M\xi \equiv M$ ■

Типови системи

PCF, T, HM

В безтиповото λ-смятане → основни са нум. на Чърч.

$c_n := \lambda_{f x} \underbrace{f(f \dots f(x))}_{n}$

$c_n : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau$

Curry? $(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha$

~~Church~~ $* \; c_n \quad c_m^{(\beta \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta \Rightarrow \beta} \quad \rightarrow (\gamma \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \gamma \Rightarrow \gamma$?

Curry $C_2^{\alpha} := \lambda_{f^{\alpha \Rightarrow \alpha}, x^{\alpha}} f(f\,x)$ не работи :/

$C_2^{\rho \Rightarrow \sigma} := \lambda_{f^{(\rho \Rightarrow \sigma)}, x^{\rho \Rightarrow \sigma}} f(f\,x)$

PCF/ T: 1) $nat \in T$ } вместо променливи
2) $Bool \in T$
3) $\rho, \sigma \in T$, то $\rho \Rightarrow \sigma \in T$

Λ: 1) $0 \in \Lambda$ } nat — 1.1) $Z \in \Lambda$
2) $S \in \Lambda$ (+1)
3) $P \in \Lambda$ (−1)
4) ~~T, F~~ true, false $\in \Lambda$ } bool
5) $x \in V$, то $x \in \Lambda$ } λ-смятане
6) ~~$MN \in \Lambda$~~ $M \in \Lambda$, $N \in \Lambda$, то $(MN) \in \Lambda$
7) $x \in V$, $M \in \Lambda$, $\tau \in T$ то $\lambda_{x^\tau} M \in \Lambda$
8) $Y \in \Lambda$ } fixed-point

$\Gamma : V \multimap T$

(23) λ-смятане

$\Gamma \vdash M : \tau$

$$\frac{}{\vdash 0 : nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : nat}{\Gamma \vdash Sn : nat} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : nat}{\Gamma \vdash Pn : nat} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash Z : nat \Rightarrow bool}$$

$$\frac{}{\vdash true : Bool} \qquad \frac{}{\vdash false : Bool} \qquad \frac{\Gamma \vdash B : bool,\ \Gamma \vdash M : \tau,\ \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash if\ B\ M\ N : \tau}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \tau}\ \Gamma(x) = \tau \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma,\ \Gamma \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \Rightarrow \tau}{\Gamma \vdash YM : \tau}$$

$M \Downarrow V$ (M се оценява до V) $M, V \in \Lambda$:

$$\frac{}{0 \Downarrow 0} \qquad \frac{M \Downarrow V}{S(M) \Downarrow S(V)} \qquad \left(\cancel{\frac{M \Downarrow V}{P(M) \Downarrow P(V)}} \qquad \frac{M \Downarrow V}{S(P(M)) \Downarrow V} \right)$$

$$\frac{M \Downarrow S(V)}{P(M) \Downarrow V} \qquad \frac{M \Downarrow 0}{Z(M) \Downarrow true} \qquad \frac{M \Downarrow S(V)}{Z(M) \Downarrow false}$$

$$\frac{}{true \Downarrow true} \qquad \frac{}{false \Downarrow false}$$

$$\frac{M \Downarrow true \quad N \Downarrow V}{if\ M N P \Downarrow V} \qquad \frac{M \Downarrow false \quad P \Downarrow V}{if\ M N P \Downarrow V}$$

$$\frac{M \Downarrow \lambda_x^{\tau} N \quad N[x \mapsto P] \Downarrow V}{MP \Downarrow V}$$

$$\frac{M(YM) \Downarrow V}{YM \Downarrow V}$$

зацикляне

def. (V) стойност
1) $0 \in V$
2) $n \in V$, $S(n) \in V$
3) $true, false \in V$
4) $\lambda_x^{\tau} M \in V$

T | — винаги тотални функции

1) ~~$N \in$~~ $nat \in T$, 2) $bool \in T$, 3) $\rho, \sigma \in T$, то $\rho \Rightarrow \sigma \in T$

4) типизиране в систем. $0^{nat} \in \Lambda$, 5) $S^{nat \Rightarrow nat} \in \Lambda$, 6) $tt^{bool}, ff^{bool} \in \Lambda$

7) $x^{\tau} \in \Lambda$ (променливи)

8) $M^{\rho \Rightarrow \sigma}, N^{\rho} \in \Lambda$, то $(MN)^{\sigma} \in \Lambda$ — λ-ами тие

9) x^{ρ} пром., $M^{\sigma} \in \Lambda$, то $(\lambda_{x^{\rho}} M^{\sigma})^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda$

10) Ако $\tau \in T$, $C_{\tau}^{bool \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau} \in \Lambda$ (if)

11) Ако $\tau \in T$, $R_{\tau}^{nat \Rightarrow \tau \Rightarrow (nat \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau} \in \Lambda$ (рекурсия над nat)

1) $$((\lambda_{x^{\rho}} M^{\sigma})^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma} \xrightarrow{\beta} M^{\sigma}[x^{\rho} \mapsto N^{\rho}]$$

2) $$(C_{\tau}\, tt^{bool}\, M^{\tau}\, N^{\tau})^{\tau} \xrightarrow{\beta} M^{\tau}$$
$$(C_{\tau}\, ff^{bool}\, M^{\tau}\, N^{\tau})^{\tau} \xrightarrow{\beta} N^{\tau}$$

!3) $$(R_{\tau}\, 0^{nat}\, M^{\tau}\, N^{nat \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau})^{\tau} \xrightarrow{\beta} M^{\tau}$$
$$(R_{\tau}(Sn)^{nat}\, M^{\tau}\, N^{nat \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau})^{\tau} \xrightarrow{\beta} (N n^{nat}(R_{\tau}\, n M N)^{\tau})^{\tau}$$

примит. рек. $\begin{cases} h(0) = c \\ h(n+1) = f(n, h(n)) \end{cases}$, но в T, τ е произв. тип

hw: Акерман с R

За T, всички термове завършват. Формално:

th. $\forall M \in \Lambda\ \exists! N\ M \xrightarrow{\beta} N$ и $N \in$ в н. ф.

$\nexists M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots$, $M_0 = M$

HM | бори се с проблема за полиморфизма (много копия на някои функции).

В T, C_{nat}, C_{bool}, $C_{nat \Rightarrow bool}$ ...

R ...

$\lambda_{x^{nat}} x^{nat}$, $\lambda_{x^{bool}} x^{bool}$

Политипове
0) $\alpha \in TV \Rightarrow \alpha \in T$ (24) λ-смятане

1) $nat \in T$
2) $bool \in T$
3) $\rho, \sigma \in T$, $\rho \Rightarrow \sigma \in T$

TS (типови схеми)
1) $\tau \in T$, то $\tau \in TS$
2) ако $\sigma \in TS$, то ~~$\forall\alpha\sigma \in TS$~~ $\forall_\alpha \sigma \in TS$

$id \doteq \forall_\alpha(\alpha \Rightarrow \alpha)$

1) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma \quad \sigma' \leq \sigma}{\Gamma \vdash M:\sigma'}$ $\quad nat \Rightarrow nat \leq \forall_\alpha(\alpha \Rightarrow \alpha)$

2) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash \forall_\alpha M:\sigma}\ \alpha \notin \Gamma$ $\quad \cancel{x:nat}$ $\dfrac{\dfrac{x:\alpha \vdash x:\alpha}{\vdash \lambda_x x:\alpha \Rightarrow \alpha}}{\lambda_x x:\forall_\alpha(\alpha \Rightarrow \alpha)}$

3) $\dfrac{\Gamma \vdash M:\forall_\alpha \sigma}{\Gamma \vdash M:\sigma[\alpha \mapsto \tau]}\ \tau \in T$

Алгоритъм W може да генерира $\forall_\alpha \sigma$.

Теория на доказателствата

David Hilbert - Програма на Hilbert

+ Формализация на математиката (? „твърдение“; ? „доказателство“)
* Пълнота (всяко вярно твърдение може да се докаже)
* Консистентност (не можем да докажем едновременно A и $\neg A$)
* Разрешимост (алгоритъм за проверка на верност на твърдения)

+ Формализация на „алгоритъм“

$\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$; $V = \{x, y, z, \dots\}$; константите са 0-местни функции

Термове: 1) $x \in V$, то x е терм

2) $f^n \in \mathcal{F}$; $t_1, \dots t_n$ - термове, то $(f\ t_1 t_2 \dots t_n)$ терм

Формули: 1) $p^n \in \mathcal{P}$; $t_1, \dots, t_n$ - термове, то $(p\ t_1 t_2 \dots t_n)$ - формула

2) A - ф-ла, то $(\neg A)$ е ф-ла

3) A, B - ф-ли, то $(A \wedge B), (A \vee B), (A \to B), (A \leftrightarrow B)$ са ф-ли

4) $x \in V$, A - ф-ла, то $\forall x A$, $\exists x A$ са ф-ли

$\models A$ - вярно в модела; $\mathcal{D} \mathcal{A} \models 2+2=4$

$\vdash A$ - доказуемо вярно | $\perp^0$ - лъжа (0-местен пред. символ)

H - Хилбертова система за извеждане на д-ва:

Аксиоми:

1) $A \to (B \to A)$ K

2) $(A \to (B \to C)) \to (A \to B) \to (A \to C)$ S

3) $A \to A \vee B$ $\quad B \to A \vee B$

4) $(A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C)$ (разглеждане на случаи)

5) $A \wedge B \to A$ $\quad A \wedge B \to B$

6) $A \to (B \to A \wedge B)$

7) $\forall x A \to A[x \mapsto t]$ $\quad t$ - терм

8) $\forall x (B \to A) \to (B \to \forall x A)$ $\quad x \notin FV(B)$ (не трябва да има допускания)

9) $A[x \mapsto t] \to \exists x A$; $A = x + x = 4$ $\quad A[x \mapsto 2] \equiv 2+2=4$

~~10) $\forall x (A \to B) \to \forall x (A \to B)$~~

10) $\forall x (A \to B) \to (\exists x A \to B)$ $\quad x \notin FV(B)$

11) $\neg\neg A \to A$

Правила: Γ - мн-во от ф-ли (допускания). $\Gamma \vdash A$:

1) $A \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash A$

2) A е аксиома, то $\Gamma \vdash A$

(MP) 3) $\Gamma \vdash A \to B$, $\Gamma \vdash \Gamma$, то $\Gamma \vdash B$

(генерализация) 4) $\Gamma \vdash A$, $x \notin FV(\Gamma) := \bigcup_{A \in \Gamma} FV(A)$, то $\Gamma \vdash \forall x A$

(25) λ-смятане

def. (доказателство)

Нека $A_1, \dots, A_n$ е списък от ф-ли. Това е д-во на A, ако:

или 1) $A \equiv A_n$

2) За всяко A_i:

Ax или 2.1) A_i е инст. на аксиома

MP или 2.2) Има $j < i$ и $k < i$: $A_j \equiv A_k \to A_i$

G 2.3) Има $j < i$: $A_i \equiv \forall x A_j$, $x \notin FV(A_k)$ $k < i$

$\emptyset \vdash A$?

$\vdash A \to A$ $\quad I$

1) $A \to (A \to A)$ $\quad Ax$

2) ~~$(A \to (A \to A)) \to (A \to A) \to (A \to A)$~~ $\quad Ax$

3) ~~$(A \to A) \to (A \to A)$~~ $\quad MP$

1) ~~$A \to C \to A$~~

2) ~~$A \to$~~

$I := SKK$

S 1) $(A \to \underbrace{(A \to A)}_{B}) \to \underbrace{A}_{C}) \to (A \to \underbrace{(A \to A)}_{B}) \to (A \to \underbrace{A}_{C})$ $\quad Ax$

K 2) $A \to ((A \to A) \to A)$ $\quad Ax$

@ 3) $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ $\quad MP$

K 4) $A \to (A \to A)$ $\quad Ax$

@ 5) $(A \to A)$ $\quad MP$

$\vdash A$ - Универсално верни ф-ли (тавтологии)

$\Updownarrow$ Kurt Gödel

$\models A$ - Една ф-ла ~~винаги~~ е вярна, ако е ~~вярна~~ истина за всеки модел.

th. (за дедукцията)

$\Gamma, A \vdash B \iff \Gamma \vdash A \to B$

S - нужен за MP с произволни предпоставки

K - вкарване на разни неща

th (генерализация)

$\Gamma \vdash A$, $x \notin FV(A)$, то $\Gamma \vdash \forall x A$

Peano (пример):

$\mathcal{F} = \{0^0, S^1\}$ $\quad \mathcal{P} = \{=^2\} \cup \{N^1\}$ $\quad N(x)$ = "x е ест. число"

PA – пеанова аритметика

1) $N(0)$
2) $\forall n (N(n) \to N(S(n)))$
3) $\forall n \neg(0 = S(n))$

RST(=)
4) $\forall n\, (n = n)$
5) $\forall n \forall m\, (n = m \to m = n)$
6) $\forall n \forall m \forall k\, (n = m \to m = k \to n = k)$

7) $\forall n \forall m\, (S(n) = S(m) \leftrightarrow n = m)$
8) $\forall n,m (N(n) \to n = m \to N(m))$
9) $A[n \mapsto 0] \to \forall n (A \to A[n \mapsto S(n)]) \to \forall n A$

$PA \vdash A \overset{?}{\Longleftrightarrow} PA \models A$ не

$PA \vdash A \Rightarrow PA \models A$

$PA \models A \not\Rightarrow PA \vdash A$ (Gödel) – 1-ва теорема за непълнота

д-во: (схема)

G := "G няма д-во в PA"

$F(x) \leftrightarrow x$ е код на ф-ла

$P_A(x) \leftrightarrow x$ е д-во на A

$PA \vdash G,\ PA \models G \Rightarrow PA \vdash \exists x P_G(x)$ ↯

$PA \vdash \neg \exists x P_G(x)$

$\Rightarrow PA \nvdash G$, но $PA \models G$ ■

Con := "PA е консистентна"; $Con := \forall x (F(x) \to \neg \exists_{y,z} (P(y,x) \wedge P(z, n(x))))$

$n(x)$ = "код на $\neg A$, ако x е код на A"

II (т-ма за непълнота). $PA \nvdash Con$

I + II – няма универс. с-ма в математиката, която е пълна и непротиворечива.

(26) λ-смятане

Стоп-проблем:

$HP(x) := \exists n, y$ (y е изп. на МТ x от n_* стъпки, което завършва)

ZFC - стандарт за „правене" на математика

- минимална - интуиционистка без лъжа
- интуиционистка
- <u>класическа</u>

$\neg\neg A \to A$ $\quad \bot^0 \quad \neg A := A \to \bot$

$11_c)$ $((A \to \bot) \to \bot) \to A$ (д-во с доп. на противното)

~~интуиционистка~~ $H_C = 1) - 10) + 11_c)$

$H_M = 1) - 10)$ - съотв. на типовете в типовото λ-смятане

$H_i = 1) - 10) + 11_i)$

$11_i)$ $\bot \to A$ (от лъжата следва всичко) ex false quodlibet

Gerhard Gentzen - секвенциално смятане
- системи за естествен извод

<u>def</u> (секвент)
~~Γ - секвент~~

<u>Секвенциално смятане</u>

<u>def.</u> (секвент)
Γ, Δ - мултимн-ва от ф-ли, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ секвент

<u>def.</u> (д-во в секв. смятане)
$G1_c$, $G1_i$, $G1_m$

$G1_c)$ $\left.\begin{array}{l} A \Rightarrow A \\ \bot \Rightarrow \end{array}\right\}$ (листо)

$\Longrightarrow$

Структурни правила:

3) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (ляво отслабване - LW) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ (дясно отсл. RW)

4) $\dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ (лява контракция - LC) $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$ RC

5) $L\wedge_1$: $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $L\wedge_2$: $\dfrac{B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B \Rightarrow \Delta}$

$R\wedge$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$

дясно - правило за доказване
ляво - правило за използване

6) $L\vee$: $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$R\vee_1$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$ $R\vee_2$: $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

идея - опростяване, докато не стигнем до листо

7) $L\rightarrow$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$

$R\rightarrow$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$

8) $L\forall$ $\dfrac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $R\forall$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A}$ $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$

$L\exists$ $\dfrac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$ $x \notin FV(\Gamma, \Delta)$ $R\exists$ $\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A}$

(27) λ-смятане

$\neg A \vee A = t$ в класическата логика

$\neg A \vee A = ?$ в интуиционистката

$A \to B \quad A \wedge B \quad \underbrace{A \vee B} \quad \forall x A \quad \underbrace{\exists x A}$

трябват свидетели в констр. логика

$\neg A := A \to \bot$

слаб лог. символ.

$A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot) \equiv (A \to B \to \bot) \to \bot$

$A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot \equiv (A \to \bot) \to (B \to \bot) \to \bot$

$\tilde{\exists} x A := \neg \forall x \neg A \equiv (\forall x (A \to \bot)) \to \bot$

$\neg\neg A \to A$ - чужд констр. логика

$A \to \neg\neg A$ - не я чужд

$A \to ((A \to \bot) \to \bot)$

MP

секвенти

$A, B \Rightarrow A \wedge B$

~~$A, \neg B \Rightarrow$~~

$\Rightarrow A, \neg A$

$B \Rightarrow A \wedge B, \neg A \wedge B$

Закон за изкл. трето чрез секвент.

$$\mathrm{RW}\ \frac{\overline{A \Rightarrow A}}{A \Rightarrow A, \bot}$$

$$\mathrm{R}_{\to}\ \frac{A \Rightarrow A, \bot}{\Rightarrow A, A \to \bot}$$

неконстр.

не знаем кое от двете

---

def. (констр. секвенти)

Γ - мултим-во, C - ф-ла, то „$\Gamma \Rightarrow C$" или „$\Gamma \Rightarrow$". Конкретно C е вярно.

Ax G1[mi]

$$Ax \; \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad L\bot \; \frac{}{\bot \Rightarrow} \text{ (само за G1i)}$$

Структурни (G1[mi])

$$LW \; \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad RW \; \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$LC \; \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Логически (G1[mi])

$$L\wedge \; \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \; (i = 0, 1) \qquad R\wedge \; \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$L\vee \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad R\vee \; \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \; (i = 0, 1)$$

$$L\to \; \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \to B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad R\to \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$L\forall \; \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad R\forall \; \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} \; x \notin FV(\Gamma)$$

$$L\exists \; \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C]}{\exists x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \; x \notin FV(\Gamma, C) \qquad R\exists \; \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}$$

(28) λ-смятане

hw. Докажете всички 4 аксиоми в секвентно смятане

$$\frac{\dfrac{\vdots}{A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to A \to C}\ R_{\to}}{\Rightarrow (A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}\ R_{\to}$$

$$\cancel{\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Rightarrow A \quad B \Rightarrow A}{\Rightarrow A \quad B \Rightarrow}\ L_{\to}}{A \to B \Rightarrow A \quad A \to B \Rightarrow B}}{A \to B \Rightarrow A \wedge B}\ R_{\wedge}}{\Rightarrow A \to B \to A \wedge B}\ R_{\to}} \quad \ldots$$

$$\cancel{\frac{\dfrac{\dfrac{(A \to B)[x \mapsto t] \Rightarrow B \quad A[x \mapsto t] \to B}{(A \to B)[x \mapsto t] \Rightarrow \exists x A \to B}\ R_{\exists}\ L_{\forall}}{\forall x (A \to B) \Rightarrow \exists x A \to B}}{\Rightarrow \forall x (A \to B) \to (\exists x A \to B)}\ R_{\to}}$$

ако $x \notin FV(B)$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\forall x (A \to B), A \Rightarrow B}{\forall x (A \to B), \exists x A \Rightarrow B}\ L_{\exists}\ x \notin FV(B)}{\forall x (A \to B) \Rightarrow \exists x A \to B}\ R_{\to}}{\Rightarrow \forall x (A \to B) \to (\exists x A \to B)}\ R_{\to}$$

$$\frac{\dfrac{A \Rightarrow A \qquad \dfrac{B \Rightarrow B}{B, A \Rightarrow B}\ LW}{(A \to B)[x \mapsto x], A \Rightarrow B}\ L_{\to}}{\forall x (A \to B), A \Rightarrow B}\ L_{\forall}$$

Рш. Закони на Деморган с G1.

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\forall x \neg A \leftrightarrow \neg \exists x A$

$\exists x \neg A \leftrightarrow \neg \forall x A$

(1)

$LW\ \perp \Rightarrow \perp$

$R\to\ A, \perp \Rightarrow \perp$

$R\forall\ \perp \Rightarrow A \to \perp$

$\cancel{\Rightarrow \exists x A} \quad \perp \Rightarrow \forall x (A \to \perp)$

$L\to\ \exists x A \to \perp \Rightarrow \forall x (A \to \perp)$

$R\to\ \Rightarrow \neg \exists x A \to \forall x \neg A$

$\perp$ - R∀, поше ∃

(2)

пр. (интуиционистка задължително)

$A \Rightarrow A, B \quad LW \quad \perp \Rightarrow \quad RW$

$L\to\ A, \perp \Rightarrow A \quad \perp, A \Rightarrow B$

$R\to\ A \to \perp, A \Rightarrow B \qquad LW\ \perp \Rightarrow \perp$

$L\to\ A \to B \Rightarrow A \to B \qquad \perp, A \to \perp \Rightarrow \perp$

$R\to\ (A \to B) \to \perp, A \to \perp \Rightarrow \perp$

$L\to\ (A \to B) \to \perp \Rightarrow \neg A \to \perp \qquad \neg B \to \perp, (A \to B) \to \perp \Rightarrow \perp$

$R\to\ \neg\neg A \to \neg\neg B, (A \to B) \to \perp \Rightarrow \perp$

$R\to\ \neg\neg A \to \neg\neg B \Rightarrow ((A \to B) \to \perp) \to \perp$

$\Rightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg (A \to B)$

$L\to\ B \Rightarrow B$

$R\to\ B, A \Rightarrow B \qquad \perp \Rightarrow \perp\ LW$

$L\to\ B \Rightarrow (A \to B) \qquad \perp, B \Rightarrow \perp$

$R\to\ (A \to B) \to \perp, B \Rightarrow \perp \qquad LW\ \perp \Rightarrow \perp$

$L\to\ (A \to B) \to \perp \Rightarrow \neg B \to \perp \qquad \perp, (A \to B) \to \perp \Rightarrow \perp$

$\neg B \to \perp, (A \to B) \to \perp \Rightarrow \perp$

(29) λ-смятане

пр. (само класически)

$d(x) :=$ "x пие"

$\exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{d(y) \Rightarrow d(x),\ d(x) \to \forall x\, d(x)}{d(y) \Rightarrow d(x),\ \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))} R\exists}{d(y) \Rightarrow \forall x\, d(x),\ \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))} R\forall}{\Rightarrow d(y) \to \forall x\, d(x),\ \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))} R\to}{\Rightarrow \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x)),\ \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))} R\exists}{\Rightarrow \exists x (d(x) \to \forall x\, d(x))} RC$$

I сл. II сл.

$$\dfrac{\dfrac{d(x) \Rightarrow d(x)}{d(y), d(x) \Rightarrow d(x),\ \forall x\, d(x)} \begin{matrix} RW \\ LW \end{matrix}}{} R\to$$

I сл. $\forall x\, d(x)$ Нека си изб. произв. y

$d(y) \to \forall x\, d(x)$

II сл. $\neg \forall x\, d(x) \leftrightarrow \exists x \neg d(x)$. Нека си го вземем това x

$d(x) \to \bot \quad d(x) \to \forall x\, d(x)$

G2[mic]

Ax (G2c)

$$\text{Ax}\ \dfrac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta} \qquad L\bot\ \dfrac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

структ. правила (G2c)

$$LC\ \dfrac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad RC\ \dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Ax (G2[mi])

$$Ax \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A} \qquad L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow [C]} \text{ (само за G2i)}$$

Структ. (G2[mi])

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

hw. LW и RW могат да се „изкарат" най-отгоре

hw. Док., че можем в аксиомата да имаме само атом.

ф-ли: $\Delta x \frac{}{p\vec{x} \Rightarrow p\vec{x}}$ (инд. по структ.)

Ax (G3c)

$$Ax \frac{}{p\vec{x}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{x}} \qquad L\bot \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

логически (G3c)

$$L\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$L\vee$ (както преди) $\qquad R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$

$L\rightarrow$, $R\rightarrow$ както преди.

$$L\forall \frac{\forall x, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$R\forall$ (както преди.)

...

$G3[mi]$ — пазим история в $G3$ (30) λ-смятане

def. (подформула)

1) $A \leq A$

2) $B \to C \leq A \Rightarrow B \leq A \quad C \leq A$

3) $B \wedge C \leq A \Rightarrow B \leq A \quad C \leq A$

4) $B \vee C \leq A \Rightarrow B \leq A \quad C \leq A$

5) $\forall x B \leq A \Rightarrow B[x \mapsto t] \leq A$ за t произв.

пр. $\exists (x+5=3) \leq c+5$

6) $\exists x B \leq A \Rightarrow B[x \mapsto t] \leq A$

$\leq \forall y (y = c+5)$

th. (подформулите) ← супер яко.

Ако имаме д-во на $\Gamma \Rightarrow \Delta$, тогава всяка ф-ла, която се среща в това д-во е подф-ла на някоя ф-ла от Γ или Δ.

сл. Съждителната логика е разрешима.

$$(Cut) \ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \quad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \cup \Gamma' \Rightarrow \Delta \cup \Delta'}$$

- позволява използването на леми в д-вата
- чупи th за подф-лите

th. (основна)

Ако $G[123][mic] + Cut \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $G[123][mic] \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$

Системи за естествен извод

N_m, N_i, N_c

$L = \{u, v, w, \dots\}$ - етикети $\not\forall$

Всеки етикет може да се сл. много пъти, но само на една и съща ф-ла.

$\cancel{[A^u]}$ → не използване повече

N_m

$$\to^+ \frac{\begin{matrix}[A^u] \\ |M \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ u \qquad \to^- \frac{\begin{matrix}|M \\ A \to B\end{matrix} \quad \begin{matrix}|N \\ A\end{matrix}}{B}$$

$$\wedge^+ \frac{\begin{matrix}|M \\ A\end{matrix} \quad \begin{matrix}|N \\ B\end{matrix}}{A \wedge B} \qquad \wedge^- \frac{\begin{matrix}|M \\ A_0 \wedge A_1\end{matrix}}{A_i}\ (i = 0, 1)$$

$$\vee^+ \frac{\begin{matrix}|M \\ A_i\end{matrix}}{A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1) \qquad \vee^- \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A^u] \\ |M \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B^v] \\ |N \\ C\end{matrix}}{C}\ \{u, v\}$$

$$\forall^+ \frac{\begin{matrix}|M \\ A\end{matrix}}{\forall x A}\ x \notin FV(M) \qquad \forall^- \frac{\begin{matrix}|M \\ \forall x A\end{matrix} \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \frac{t \quad \begin{matrix}|M \\ A[x \mapsto t]\end{matrix}}{\exists x A} \qquad \exists^- \frac{\exists x A \quad \begin{matrix}[A^u] \\ |P \\ C\end{matrix}}{C}\ u\ x \notin FV(P) \cup FV(C)$$

$$Efq\ \frac{\begin{matrix}|M \\ \bot\end{matrix}}{A}\ (\text{само за } N_i) \qquad Stab\ \frac{\begin{matrix}[\neg A^u] \\ |M \\ \bot\end{matrix}}{A}\ u,\ (\text{само за } N_c)$$

<u>def.</u> Казваме, че от Γ сме док. A в с-ма за ест. извод, ако съществува д-во с корен A и листа Γ, които са $\boxed{\text{незадраскани}}$.

Системи ест. извод (31) λ-смятане

$$A \to A \qquad\qquad \dfrac{A^u}{A \to A}\,u$$

к) $A \to B \to A$

$$\dfrac{\dfrac{A^u}{B \to A}\,v}{A \to B \to A}\,u$$

s) $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$

$$\cancel{\dfrac{A^u \quad A \to B \to C^v}{B \to C}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^u \quad A \to B \to C^v}{B \to C}\,\to^- \qquad \dfrac{A^u \quad A \to B^w}{B}\,\to^-}{C}\,\to^-}{A \to C}\,\to^+ u}{(A \to B) \to A \to C}\,\to^+ w}{(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C}\,\to^+ v$$

Аксиома на Хилберт: $(A \to C) \to (B \to C) \to A \vee B \to C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \vee B^w \qquad \dfrac{A \to C^u \quad A^a}{C}\,\to^- \qquad \dfrac{B \to C^v \quad B^b}{C}\,\to^-}{C}\,\vee^-\, a, b}{A \vee B \to C}\,\to^+ w}{(B \to C) \to A \vee B \to C}\,\to^+ v}{(A \to C) \to (B \to C) \to A \vee B \to C}\,\to^+ u$$

$\forall x\,(B \to A) \to (B \to \forall x A)$, ако $x \notin FV(B)$

$$\to^{+}\dfrac{\to^{+}\dfrac{\forall^{+}\dfrac{\to^{-}\dfrac{\forall^{-}\dfrac{\forall y(B \to A(y))^{u}}{B \to A(x)}\,x \qquad B^{v}}{A(x)}}{\forall x A(x)}\,x \notin FV(B)}{B \to \forall x A(x)}\,v}{\forall y(B \to A(y))^{u} \to B \to \forall x A(x)}$$

$\forall x(A \to B) \to (\exists x A \to B)$, ако $x \notin FV(B)$

$$\exists^{-}\dfrac{\exists x A(x)^{v} \qquad B}{}$$

$$\to^{+}\dfrac{\to^{+}\dfrac{\exists^{-}\dfrac{\exists x A(x)^{v} \qquad \to^{-}\dfrac{\forall^{-}\dfrac{\forall x A(x) \to B^{u}}{A(x) \to B}\,x \qquad A(x)^{w}}{B}}{B}\,w}{\exists x A(x) \to B}\,v}{(\forall x A(x) \to B) \to \exists x A(x) \to B}\,u$$

имам право да изп. $A(x)$ поне не x своб.

---

1) $(A \wedge B \to C) \to B \to A \to C$

2) $A \wedge B \to B \wedge A$

$$\to^{+}\dfrac{\wedge^{+}\dfrac{\wedge^{-}\dfrac{A \wedge B^{v}}{B} \qquad \wedge^{-}\dfrac{A \wedge B^{v}}{A}}{B \wedge A}}{A \wedge B \to B \wedge A}\,v$$

1) $\cancel{A \wedge B \to C^{u}}$

$$\cancel{\dfrac{A^a \quad B^b}{A \wedge B}\wedge^+}$$

$$\cancel{\dfrac{A^a \quad B^b}{A \wedge B}}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^a \quad B^b}{A \wedge B}\wedge^+ \quad A \wedge B \to C^w}{C}\to^-}{A \to C}\to^+ a}{B \to A \to C}\to^+ b}{(A \wedge B \to C) \to A \to B \to C}\to^+ w$$

$\cancel{(A \wedge B \to C) \to A}$ $\quad$ $\cancel{(A \wedge B \to C) \to A \to B}$

Де Морган

$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\neg \forall x A \leftrightarrow \exists x \neg A$

$\neg \exists x A \leftrightarrow \forall x \neg A$

hw

$((A \to B) \to A) \to A$ (закон на Pierce)

д-во: Доп., че $\neg A \Rightarrow \neg A \to \neg(A \to B)$

$A \wedge \neg B$

$$\dfrac{\dfrac{A \to \bot^v \quad A^w}{\bot}\to^-}{\dfrac{B}{A \to B}\to^+ w}\bot$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to \bot^v \quad \dfrac{(A \to B) \to A^u \quad A \to B}{A}\to^-}{\bot}}{A}\mathrm{Stab}\ v}{((A \to B) \to A) \to A}\to^+ u$$

$\neg A \to \bot^v$

$(A \to B) \to A^u$

A^w

1.1)

$$\dfrac{(A \wedge B) \to \bot \to (A \to \bot \vee B \to \bot)^u \quad (A \wedge B) \to \bot}{A \to \bot \vee B \to \bot}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(A \to \bot \vee B \to \bot) \to \bot^v}{\bot}}{A \to \bot \vee B \to \bot}\mathrm{Stab}\ v}{(A \wedge B) \to \bot \to (A \to \bot) \vee (B \to \bot)}\to^+ u$$

$\dfrac{}{\bot}\ w$

$(A \wedge B) \to \bot$

$$\dfrac{\dfrac{((A\to\bot)\vee(B\to\bot))\to\bot^{u} \qquad \dfrac{A\to\bot^{w}}{(A\to\bot)\vee(B\to\bot)}}{\dfrac{\bot}{A}\,w \qquad \dfrac{-''-}{B}}}{}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\vee B\to\bot^{u} \qquad A\wedge B}{\bot}}{(A\to\bot)\vee(B\to\bot)}\,v}{((A\wedge B)\to\bot)\to(A\to\bot)\vee(B\to\bot)}\,u$$

3.2.

$$\dfrac{\dfrac{\exists x(A\to\bot)^{u} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x A^{v}}{A} \qquad A\to\bot^{w}}{\bot}}{\dfrac{\bot}{\forall x\{A\to\bot\}}\,v}\,w}{\exists x(A\to\bot)\longrightarrow\forall x\{A\to\bot\}}\,u \qquad \blacksquare$$

Система за д-ва: Minlog System.

Coq.

Th за 4 цвета.

основание на констр. лог. учения на Brouwer

def. <u>Интерпретация на Brouwer-Heyting и Kolmogorov</u> ← ф-ли като задачи

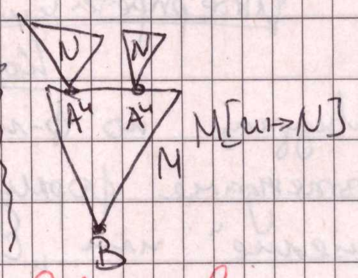
def. Индукция по ф-лите

Разглеждаме формулите като „задачи" или „проблеми", изискващи „решение" или „свидетели".

1) Атомарни ф-ли $p\vec{t}$ – не изискват решение.
2) $A \wedge B$ изисква двойка решения: решение на A и решение на B
3) $A \to B$ изисква за решение ф-я, която на всяко р-е на A съпоставя решение на B.
4) $A \vee B$ изисква решение на A или решение на B с етикет „A" или „B".
5) $\forall x A(x)$ изисква решение ф-я, която на x съпоставя решение на $A(x)$.
6) $\exists x A(x)$ изисква свидетел за x и решение на A за този свидетел. $A(x)$.

Изоморфизъм на Curry-Howard

λ-смятане	Теория на д-вата
$\Rightarrow$ (функция)	$\to$ (импликация)
$\times$ (декартово произв.)	$\wedge$ (конюнкция)
тип	формули
Λ^T	минимална съжд. логика с импликации
типови променливи	атомарни формули
$\lambda_x M$ (абстракция)	$\to^+$
променливи	допускания (етикети им)
MN (апликация)	$\to^-$ (MP)

λ-смятане	д-ва
β-редукция $(\lambda u.M)N \to_\beta M[u \mapsto N]$	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^u}{\vdots}\ M}{B}\ \to^+ \qquad \dfrac{\vdots\ N}{A}}{\dfrac{A \to B}{B}}\ \to^-$  елиминиране на Cut правилото
нормална форма	д-во без използване на Cut
теорема за силна нормализация	теорема на Gentzen за Cut
$\boxed{\text{програми}}$	$\boxed{\text{доказателства}}$
„празен тип"	$\bot$
unit	$\{u\}$
abort ⚠ (throw)	$\bot \to A$
call/cc (goto или break)	$((A \to \bot) \to \bot) \to A$
чисто функц. програмиране	минимална логика
процедурно прогр.	класическа логика
type checking (type inference)	коректност на д-во
обитаемост на тип	доказуемост на ф-ла

λ-смятане (34)

$\sigma, \tau ::= \alpha \mid \sigma \Rightarrow \tau$

$M, N ::= x^\tau \mid (M^{\sigma\Rightarrow\tau} N^\sigma)^\tau \mid (\lambda_{x^\sigma} M^\tau)^{\sigma\Rightarrow\tau}$

$N[mic]$

$A, B ::= p\vec{t} \mid A \to B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall_x A \mid \exists_x A$

$M, N ::= u^A \mid (M^{A\to B} N^A)^B \mid (\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B}$

N_m:
$\mid \wedge^+ : A \to B \to A \wedge B \mid \wedge^-_C : (A \to B \to C) \to A \wedge B \to C \quad (A\wedge B) \to (A\to B\to C) \to C$

$\mid \vee^+_0 : A \to A \vee B \mid \vee^+_1 : B \to A \vee B \mid \vee^- : (A \vee B) \to (A \to C) \to (B \to C) \to C$

$\mid (M^{\forall_x A} t)^{A[x\mapsto t]} \mid (\lambda_x M^A)^{\forall_x A} \mid \exists^+ : \forall_x (A \to \exists_x A) \mid \exists^-_C : \exists_x A \to \forall_x (A \to C) \to C$

$x \notin FV[FA(M)]$ за x изпорне вв. допускания. $\qquad x \notin FV(C)$

$\langle M^A, N^B \rangle^{A\wedge B} := (\wedge^+ M^A N^B)^{A\wedge B}$ cons $\qquad (M^A_l)^{A\vee B} := (\vee^+_0 M^A)^{A\vee B}$

$(M^{A\wedge B}_l)^A := \wedge^-_A M (\lambda_{u,v} u)$ car $\qquad (M^B_r)^{A\vee B} := (\vee^+_1 M^B)^{A\vee B}$

$(M^{A\wedge B}_r)^B := \wedge^-_B M (\lambda_{u,v} v)$ cdr

За всеки $(\forall)$ е спец. вид импл., в който не взимаме ф-ли, а термове.

$FA(M)$ - свободни допускания на M

$\langle t, M^{A[x\mapsto t]} \rangle := \exists^+ t M \qquad \exists^+ : \forall_x (A \to \exists_x A)$

$\exists^- M^{\exists_x A} (\lambda_x (\lambda_u N^C))^{\forall_x (A\to C)} \qquad \exists^+ t : A[x\mapsto t] \to \exists_x A$

$N_i \quad \bot_C : \bot \to C \qquad N_c \quad Stab : ((C \to \bot) \to \bot) \to C$

пр.: $\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$

$M := \cancel{\lambda_u A\wedge B\to\bot} \; \cancel{\lambda_u^{A\wedge B\to\bot} (Stab_{\neg A\vee\neg B} (\lambda_v^{(\neg A\vee\neg B)\to\bot} (u \langle Stab_A (\lambda_w^{A\to\bot} (v (w^{\neg A}{}_l)^{\neg A\vee\neg B}}$

$\lambda_u^{A\wedge B\to\bot} (Stab_{\neg A\vee\neg B} ($
$\lambda_v^{(\neg A\vee\neg B)\to\bot} (u \langle (Stab_A (\lambda_w^{A\to\bot} (v (w^{\neg A}{}_l)^{\neg A\vee\neg B})^\bot)^{(A\to\bot)\to\bot})^A$
$(Stab (\lambda_w^{B\to\bot} (v (w^{\neg B}{}_r)^{\neg A\vee\neg B})^\bot)^{(B\to\bot)\to\bot})^B \rangle^{A\vee B}$
$)^\bot)^{((\neg A\vee\neg B)\to\bot)\to\bot})^{\neg A\vee\neg B}$

$M := \lambda_u (Stab (\lambda_v u \langle Stab (\lambda_w v (w_l)), Stab (\lambda_w v (w_r)) \rangle))$

Симулиране на класически с минимална логика

hw I стъпка

lem 1: $\forall\vec{x}(\bot \to p\vec{x}) \vdash_m \bot \to A$

(симулир. можем да изкараме от минимал.)

нотация:

$\vdash_{m|c}$ – д-во в $N[m|c]$

$\vdash^{\to\forall}_{\dots}$ – д-во в N, ограничени до ф-ли, в които участва $\overline{\forall}$ само $\forall$, $\to$, $\exists$, $\bot$

lem 2: $\underbrace{\forall\vec{x}(\neg\neg p\vec{x} \to p\vec{x})}_{Sp} \vdash^{\to\forall}_m \neg\neg A \to A$

д-во:

Индукция по деф. на A:

1) $A \equiv p\vec{t}$, $M := S_p\vec{t}$

2) $A \equiv B \to C$ (доп., че имаме д-ва $D^{\neg\neg B \to B}$ и $Q^{\neg\neg C \to C}$)

$M := (\lambda_u{}^{\neg\neg(B\to C)}(\lambda_v{}^B(Q(\lambda_w{}^{C\to\bot}(u(\lambda_a{}^{B\to C}(w(av)^C)^\bot)^{\neg(B\to C)})^\bot)^{(C\to\bot)\to\bot})^C)^{\neg\neg(B\to C)\to B\to C}$

без типове си прил.

3) $A \equiv \forall_x B$. IX $\quad$ ИП $\quad D^{\neg\neg B \to B}$

$M^{\neg\neg A \to A} := \lambda_u{}^{\neg\neg\forall xB}(\lambda_x(D(\lambda_v{}^{\neg B}(u(\lambda_w{}^{\forall xB}(v(wx))^{\bot})^{\neg\forall xB})^\bot)^{\neg\neg B})^B)^{\forall xB}$

■

hw lem 3: а) $\vdash^{\to,\forall}_m \tilde{\wedge}^+, \tilde{\vee}^+_{0,1}, \tilde{\exists}^+$

б) $\vdash^{\to,\forall}_c \tilde{\wedge}^-, \tilde{\vee}^-, \tilde{\exists}^-$

д-во:

б) $\tilde{\vee}^-$: ~~$A\tilde{\vee}B \to (A \to B \to C) \to C$~~ $A\tilde{\vee}B \to (A\to C) \to (B\to C) \to C$

$M :=$ ~~$\lambda_u{}^{A\tilde{\vee}B}\lambda_v{}^{A\to B\to C}($~~

$\lambda_u{}^{A\tilde{\vee}B}, v^{A\to C}, w^{B\to C}(Stab_C(\lambda_a{}^{\neg C}(u(\lambda_b{}^A(a(vb)^C)^\bot)^{\neg A}(\lambda_b{}^B(a(wb)^C)^\bot)^{\neg B})^\bot)^{\neg\neg C})^C$

$\overset{\shortparallel}{(A\to\bot)\to(B\to\bot)\to\bot}$

■

---

hw lem 4: а) $\vdash A \wedge B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\wedge} B$

б) $\vdash A \vee B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\vee} B$

в) $\vdash \exists_x A \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} \tilde{\exists} x A$

Док: б) $\vdash_c \tilde{\exists} x A \to \exists x A$

$$M :\equiv \lambda u^{\tilde{\exists} x A \,=\, (\forall x (A \to \bot)) \to \bot} \left(\mathrm{Stab}_{\exists x A} \left(\lambda v^{\neg \exists x A} \left(u \left(\lambda x, w^{A} \left(v \left(\exists^{+} x\, w \right)^{\exists x A} \right)^{\bot} \right)^{\forall x (A \to \bot)} \right)^{\bot} \right)^{\neg\neg \exists x A} \right)^{\exists x A}$$

$\blacksquare$