

Системи за изразяване на доказателства

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

14–17 май 2019 г.

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Разглеждаме език предикатно смятане от първи ред $\mathcal{L} := \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$:

- \mathcal{F} е списък от *функционални символи с брой аргументи*
 - 0-местните функционални символи наричаме *константи*
- \mathcal{P} е списък от *предикатни символи с брой аргументи*
- $\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \mathcal{F} \cap V = \mathcal{P} \cap V = \emptyset$

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане \mathcal{L} .

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и t_1, \dots, t_n са термове, то $(f^n t_1 t_2 \dots t_n)$ е терм.

Дефиниция (Формули)

- Ако $p^n \in \mathcal{P}$ и t_1, \dots, t_n са термове, то $(p^n t_1 t_2 \dots t_n)$ е (атомарна) формула.
- Ако A и B са формули, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \rightarrow B)$ са формули.
- Ако $x \in V$ и A е формула, то $(\forall_x A)$ и $(\exists_x A)$ са формули.

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-въшните скоби
- считаме, че \wedge и \vee са лявоасоциативни, а \rightarrow е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \dots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1, \dots, x_n}$ и $\exists_{x_1} \dots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1, \dots, x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа \perp^0 , която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \rightarrow \perp)$
- дефинираме $(A \leftrightarrow B) := ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
- считаме, че логическите операции са подредени по приоритет в следния ред: $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
- дефинираме FV за термове и формули и BV за формули както в λ -смятането
- дефинираме субституция $[x \mapsto t]$ в термове и формули както в λ -смятането, грижейки се кванторите \forall и \exists да не прихващат променливи

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- класическа логика (Gottlob Frege)
 - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим
- интуиционистка (конструктивна) логика (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Arend Heyting)
 - в тази логика можем да докажем $\exists_x A$ само ако посочим терм t удовлетворяващ A
- минимална логика (Ingebrigt Johansson)
 - \perp вече не означава лъжа, а е обикновен предикатен символ

Хилбертови системи: H_m , H_i , H_c Аксиоми на H_m

- 1 $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$
- 2 $A \rightarrow B \rightarrow A$
- 3 $A \wedge B \rightarrow A, \quad A \wedge B \rightarrow B$
- 4 $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$
- 5 $A \rightarrow A \vee B, \quad B \rightarrow A \vee B$
- 6 $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- 7 $\forall_x A \rightarrow A[x \mapsto t]$
- 8 $\forall_x (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow \forall_x A)$, ако $x \notin FV(B)$
- 9 $A[x \mapsto t] \rightarrow \exists_x A$
- 10 $\forall_x (A \rightarrow B) \rightarrow (\exists_x A \rightarrow B)$, ако $x \notin FV(B)$

Допълнителна аксиома за H_i

- 11 $\perp \rightarrow A$ (ex falso quodlibet)

Допълнителна аксиома за H_c

- 11 $\neg\neg A \rightarrow A$ (стабилност)

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в $H[mic]$, наричаме списък от формули $A_1, \dots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на $H[mic]$

(MP) $A_k \equiv A_j \rightarrow A_i$ за някои $j, k < i$

(Gen) $A_i \equiv \forall_x A_j$ за някое $j < i$, ако $x \notin FV(\Gamma)$.

Отбелязваме $\Gamma \frac{}{H[mic]} A$.

Теорема за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \rightarrow A$
- $A \wedge B \vdash B \wedge A$
- $\forall_x A \vdash \exists_x A$
- $\vdash A \rightarrow A$

Теорема (за дедукцията)

$\Gamma \vdash A \rightarrow B$ тогава и само тогава когато $\Gamma, A \vdash B$.

Теорема (за генерализацията)

$\Gamma \vdash \forall_x A$ тогава и само тогава когато $\Gamma \vdash A$ и $x \notin FV[\Gamma]$.

Теорема за коректност и пълнота

Дефиниция

Казваме, че $\Gamma \models A$, ако A е вярна във всеки модел на Γ .

Теорема (Коректност)

Ако $\Gamma \vdash A$, то $\Gamma \models A$.

Теорема (Пълнота, Gödel)

Ако $\Gamma \models A$, то $\Gamma \vdash_{HC} A$.

Доказателство.

Допускаме, че $\Gamma \not\models A$. Тогава можем да построим термален (Ербранов) модел на $\Gamma \cup \{\neg A\}$, което е в противоречие с $\Gamma \models A$. \square

Пример: Пеанова аритметика (РА)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.

За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

- 1 $N 0$ (0 е естествено число)
- 2 $\forall_n (N n \rightarrow N(S n))$ (всяко естествено число има наследник...)
- 3 $\forall_n \neg(0 = S n)$ (... различен от 0)
- 4 $\forall_n (n = n)$ (рефлексивност)
- 5 $\forall_{n,m} (n = m \rightarrow m = n)$ (симетричност)
- 6 $\forall_{n,m,k} (n = m \rightarrow m = k \rightarrow n = k)$ (транзитивност)
- 7 $\forall_{n,m} (n = m \rightarrow N n \rightarrow N m)$ (заместване в N)
- 8 $\forall_{n,m} (n = m \rightarrow S n = S m)$ (заместване в S)
- 9 $\forall_{n,m} (S n = S m \rightarrow n = m)$ (инективност на S)
- 10 $\mathbf{A}(0) \rightarrow \forall_n (\mathbf{A}(n) \rightarrow \mathbf{A}(S(n))) \rightarrow \forall_n \mathbf{A}(n)$ (индукция)

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A , такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA е *непротиворечива*, то има G , такава че $PA \not\vdash G$ и $PA \not\vdash \neg G$.

Доказателство.

Нека $P(u, x) :=$ “ u е код на доказателство в PA на формулата с код x ”.

Разглеждаме оператора над формули $\Gamma(A) := \exists_u P(u, \text{“кодът на } A\text{”})$.

Той има неподвижна точка G , за която: $PA \vdash G \leftrightarrow$ “ G няма доказателство в PA ”.

Да допуснем, че $PA \vdash G$, но тогава $PA \not\vdash G$ — противоречие!

Да допуснем, че $PA \vdash \neg G$, но тогава $PA \vdash G$, което би означавало, че PA е противоречива. □

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned}
 \text{Neg}(x, y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A, \text{ то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”}, \\
 \text{Und}(x) &:= \forall y (\text{Neg}(x, y) \rightarrow \nexists u P(u, x) \wedge \nexists u P(u, y)), \\
 \text{Con} &:= \neg \exists x, y, u, v (\text{Neg}(x, y) \wedge P(u, x) \wedge P(v, y)), \\
 FT &:= \text{Con} \rightarrow \text{Und}(g), \text{ където } g \text{ е кодът на } G.
 \end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA е непротиворечива, то $PA \not\vdash \text{Con}$.

Доказателство.

Да допуснем, че $PA \vdash \text{Con}$. Кодираме доказателството на първата теорема и получаваме $PA \vdash FT$. Тогава $PA \vdash \nexists u P(u, g)$.

Но по дефиницията на G , това означава, че $PA \vdash G$, което е противоречие с първата теорема. □

Секвенциално смятане: $G1c$

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*.
 “Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Строим дървета от секвенти; $\Gamma \vdash A$, ако има дърво с корен $\Gamma \Rightarrow A$.
 Аксиоми ($G1c$)

$$Ax \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$L\perp \frac{}{\perp \Rightarrow}$$

Структурни правила ($G1c$)

$$LW \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$RW \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$RC \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: $G1m$, $G1i$

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.

“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми ($G1[m]$)

$$Ax \frac{}{A \Rightarrow A}$$

$$L\perp \frac{}{\perp \Rightarrow} \text{ (само за } G1i)$$

Структурни правила ($G1[m]$)

$$LW \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$RW \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$LC \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$L\wedge \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad (i = 0, 1)$$

$$L\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\forall \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

$$L\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C]}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma, C)$$

$$R\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$R\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$R\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$R\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

$$R\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists_x A}$$

Свойства на $G1$

Задача

Да се докажат всички Хилбертови аксиоми в $G1$.

Задача (Еквивалентност на H и $G1$)

Да се докаже, че $\Gamma \mid_{H[mic]} A \iff \Gamma \mid_{G1[mic]} A$.

Задача

Да се докаже, че ако $\mid_{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta$, то може да се постори доказателство на $\Gamma \Rightarrow \Delta$, в което всички аксиоми са атомарни формули, т.е. са от вида $p\vec{t} \Rightarrow p\vec{t}$.

Примери

Задача

Да се докаже законът за изключеното трето: $\vdash_c A \vee \neg A$.

Задача

Да се докаже законът на Peirce: $\vdash_c ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$.

Задача

Да се докаже, че: $\vdash_i (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow \neg\neg(A \rightarrow B)$.

Задача

Да се докаже формулата за пияниците: $\vdash_c \exists x(d x \rightarrow \forall x d x)$

Примери

Задача

Да се докажат законите на *de Morgan* в класическа, а където е възможно в минимална логика:

$$\textcircled{1} \quad \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$$\textcircled{2} \quad \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\textcircled{3} \quad \neg\forall_x A \leftrightarrow \exists_x \neg A$$

$$\textcircled{4} \quad \neg\exists_x A \leftrightarrow \forall_x \neg A$$

Задача

$$\textcircled{1} \quad \frac{}{c} (A \rightarrow \exists_x B) \rightarrow \exists_x (A \rightarrow B), \text{ ако } x \notin \text{FV}(A).$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{}{c} ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \rightarrow C$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{}{c} (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\text{Ax} \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta}$$

$$\text{L}\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$\text{LC} \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{RC} \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Аксиоми (G2[mi])

$$\text{Ax} \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A}$$

$$\text{L}\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow [C]} \text{ (само за G2i)}$$

Структурни правила (G2[mi])

$$\text{LC} \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Еквивалентност на $G1$ и $G2$

Задача

Да се докаже, че ако съществува извод на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ в $G2[mic]$ с дълбочина n , то за произволни Γ' и Δ' съществува извод на $\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'$ в $G2[mic]$ с дълбочина n .

Доказателство.

Индукция по n . □

Задача

Да се покаже, че $\left| \frac{}{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \right. \iff \left| \frac{}{G2[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \right.$

Доказателство.

(\Leftarrow) е тривиална; за (\Rightarrow) елиминираме последователно прилаганията на LW и RW отгоре надолу използвайки предишното твърдение. □

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{t}}$$

$$\text{L}\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$\text{L}\forall \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$$\text{R}\forall \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$\text{L}\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$\text{R}\exists \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t], \exists_x A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax} \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}}$$

$$\text{L}\perp \frac{}{\perp, \Gamma \Rightarrow C} \text{ (само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\wedge \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\vee \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1} \quad (i = 0, 1)$$

$$\text{L}\rightarrow \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \quad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\rightarrow \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$\text{L}\forall \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow C}$$

$$\text{R}\forall \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

$$\text{L}\exists \frac{A, \Gamma \Rightarrow C}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow C} \quad x \notin \text{FV}(\Gamma, C)$$

$$\text{R}\exists \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists_x A}$$

Свойства на G3

Дефиниция (Обратимо правило)

Правилото $\frac{S_1}{S_2}$ наричаме *обратимо*, ако $\vdash S_1 \iff \vdash S_2$.

Задача (Обратимост в G3)

Да се покаже, че всички правила в $G3[mic]$ са обратими, с изключение на $L\rightarrow$ в $G3[mi]$, за което само десният клон е обратим.

Задача (Симулация на контракция)

Да се покаже, че LC е изводимо в $G3[mic]$ и RC е изводимо в $G3c$.

Следствие 1

$$\frac{}{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \frac{}{G2[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \frac{}{G3[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Свойство на подформулите

Дефиниция (Подформула)

Дефинираме $A \leq B$ (A е подформула на B) с индукция по A :

- $A \leq A$
- Ако $B \circ C \leq A$, за $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то $B \leq A$ и $C \leq A$
- Ако $Q_x B \leq A$ за $Q \in \{\forall, \exists\}$ и t е произволен терм, то $B[x \mapsto t] \leq A$

Твърдение 1 (Свойство на подформулите)

Ако имаме доказателство в $G[123][mic]$ на секвента $\Gamma \Rightarrow \Delta$, тогава всяка формула, която се среща в доказателството е подформула на някоя формула от Γ или Δ .

Секвенциално смятане: Cut

Разглеждаме следното допълнително правило:

$$(\text{Cut}) \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \quad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma \Gamma' \Rightarrow \Delta \Delta'}$$

Свойството на подформулите вече не е валидно!

Теорема (Основна теорема на секвенциалното смятане)

Ако $G[123][mic] + \text{Cut} \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, то $G[123][mic] \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Системи за естествен извод: N_m , N_i , N_c

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”
- Някои правила за построяване на дървото изискват да се задраскат всички срещания на свободните листа с даден етикет
- Ако \mathcal{D} е доказателствено дърво, с $FA(\mathcal{D})$ означаваме множеството на свободните му листа
- Ако можем да построим дърво \mathcal{D} с корен A и Γ е множество от формули такова, че $FV(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$, то отбелязваме $\Gamma \mid_{N[mic]} A$
- $\vdash A$ означава, че сме доказали A , задрасвайки всички листа

Правила за извод в $N[mic]$

Правилата за естествен извод са два вида: за въвеждане (\circ^+) и елиминирание (\circ^-), по едно за всеки логически символ \circ .

$$\rightarrow^+ \frac{\begin{array}{c} [A^u] \\ | M \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} u$$

$$\rightarrow^- \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \rightarrow B \quad A \end{array}}{B}$$

$$\wedge^+ \frac{\begin{array}{c} | M \quad | N \\ A \quad B \end{array}}{A \wedge B}$$

$$\wedge^- \frac{\begin{array}{c} | M \\ A_0 \wedge A_1 \end{array}}{A_i} (i = 0, 1)$$

$$\vee^+ \frac{\begin{array}{c} | M \\ A_i \end{array}}{A_0 \vee A_1} (i = 0, 1)$$

$$\vee^- \frac{\begin{array}{c} | P \quad [A^u] \quad [B^v] \\ A \vee B \quad | M \quad | N \\ C \quad C \end{array}}{C} u, v$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \frac{| M \quad A}{\forall_x A} \quad x \notin FV[FA(M)]$$

$$\forall^- \frac{| M \quad \forall_x A \quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \frac{t \quad A[x \mapsto t]}{\exists_x A} \quad | M$$

$$\exists^- \frac{| M \quad \exists_x A \quad C \quad [A^u]}{C} \quad | N \quad u \quad \begin{array}{l} x \notin FV[FA(N \setminus \{A^u\})] \\ x \notin FV(C) \end{array}$$

$$\text{Efq} \frac{| M}{\perp A} \quad (\text{само за Ni})$$

$$\text{Stab} \frac{[\neg A^u] \quad | M}{\perp A} \quad u \quad (\text{само за Nc})$$