Структурна индукция

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

26 февруари 2019 г.

Какво разбираме под индукция?

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$.

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$.

Доказателство.

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Доказателство.

- за $n = 0$: трябва да проверим, че $0 = 0.1$ ✓

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$.

Доказателство.

- за $n = 0$: трябва да проверим, че $0 = 0$. ✓
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$.

Доказателство.

- за $n = 0$: трябва да проверим, че $0 = 0.1$ ✓
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- ще го докажем за $n + 1$:

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Доказателство.

- за $n = 0$: трябва да проверим, че $0 = 0.1$ ✓
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- ще го докажем за $n + 1$:
- $(2+4+\ldots+2n)+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2)$ ✓

Какво разбираме под индукция?

Интуитивно понятие:

- Показваме решението на най-простото твърдение (база, дъно)
- Допускаме, че твърдението е вярно (индукционно допускане)
- С негова помощ доказваме твърдението за нов случай (стъпка)

Задача

Да се докаже, че $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

Доказателство.

- за $n = 0$: трябва да проверим, че $0 = 0.1$ ✓
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- ще го докажем за $n + 1$:
- $(2+4+\ldots+2n)+2(n+1) = n(n+1)+2(n+1) = (n+1)(n+2)$ ✓

Следователно: доказахме свойството за произволно n. □

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
    - те са един и същи цвят по индукционно допускане

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- да махнем **първия** кон, получаваме друга група от n коне

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- да махнем **първия** кон, получаваме друга група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- да махнем **първия** кон, получаваме друга група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- оттук следва, че всички $n + 1$ коне са един и същи цвят

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство.

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- да махнем **първия** кон, получаваме друга група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- оттук следва, че всички $n + 1$ коне са един и същи цвят

Следователно: доказахме свойството за произволно n. $\square$

Проблеми с интуитивното понятие

Задача (George Pólya)

Да се докаже, че всички коне са един и същи цвят.

Доказателство. Къде е грешката?

- за $n = 1$: един кон тривиално е един и същи цвят.
- нека допуснем, че сме доказали свойството за дадено n
- да разгледаме група от $n + 1$ коне
- да махнем **последния** кон, получаваме група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- да махнем **първия** кон, получаваме друга група от n коне
  - те са един и същи цвят по индукционно допускане
- оттук следва, че всички $n + 1$ коне са един и същи цвят

Следователно: доказахме свойството за произволно n. □

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

- $o \in N$,

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

- $o \in N$,
- ако $X \in N$, то $s(X) \in N$.

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

- $o \in N$,
- ако $X \in N$, то $s(X) \in N$.

Примерни елементи на N: o, $s(o)$, $s(s(s(s(s(o)))))$, ...

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

- $o \in N$,
- ако $X \in N$, то $s(X) \in N$.

$\{o, s(o), s(s(o)), \ldots s^n(o), \ldots\}$

$N' := N \cup \{s(a), s(s(a)), \ldots, s^n(a), \ldots\}$

Примерни елементи на N: o, $s(o)$, $s(s(s(s(s(o)))))$, …
Вярно ли е, че $s(a) \in N$? Защо?

Индуктивна дефиниция на множества

Трябва да започнем от по-базово понятие: множество.
Какво означава да дефинираме множество по индукция?

Пример: Дефинираме индуктивно множеството N такова, че:

- $o \in N$,
- ако $X \in N$, то $s(X) \in N$.

Примерни елементи на N: o, $s(o)$, $s(s(s(s(s(o)))))$, ...
Вярно ли е, че $s(a) \in N$? Защо?
При индуктивна дефиниция обикновено подразбираме най-малкото множество, което изпълнява индуктивните клаузи.

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$; т.е. $o \in T$

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$; т.е. $o \in T$
- Ако $A(n)$, то $A(s(n))$

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$; т.е. $o \in T$
- Ако $A(n)$, то $A(s(n))$; т.е. ако $n \in T$, то $s(n) \in T$

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$; т.е. $o \in T$
- Ако $A(n)$, то $A(s(n))$; т.е. ако $n \in T$, то $s(n) \in T$

Но тогава $T = N$, т.е. A е вярно за всяко $n \in N$.

Доказателство по индукция чрез индуктивна дефиниция

Да докажем свойството $A(n)$ по индукция се свежда до индуктивна дефиниция на множество.

Да разгледаме множеството T от елементи n, за които $A(n)$ е истина.

Да докажем нещо по индукция означава да проверим, че:

- $A(o)$; т.е. $o \in T$
- Ако $A(n)$, то $A(s(n))$; т.е. ако $n \in T$, то $s(n) \in T$

Но тогава $T = N$, т.е. A е вярно за всяко $n \in N$.

Всъщност доказахме A с индукция по структурата на множеството N.

Проблеми на полуформалната дефиниция

Да дефинираме по индукция следното множество:

- $B \subseteq N$

Проблеми на полуформалната дефиниция

Да дефинираме по индукция следното множество:

- $B \subseteq N$
- $o \in B$

$\mathbb{N}$

$B = ?$

$B = \{0, s(s(0)), \ldots, s^{2n}(0), \ldots\}$

Проблеми на полуформалната дефиниция

Да дефинираме по индукция следното множество:

- $B \subseteq N$
- $o \in B$
- ако $X \notin B$, то $s(X) \in B$

Проблеми на полуформалната дефиниция

Да дефинираме по индукция следното множество:

- $B \subseteq N$
- $o \in B$
- ако $X \notin B$, то $s(X) \in B$

$B = ?$

- $B = \{o, s(s(o)), s(s(s(s(o)))), \ldots\}$
- $B = \{o, s(o), s(s(s(o))), s(s(s(s(s(o))))), \ldots\}$

Проблеми на полуформалната дефиниция

Да дефинираме по индукция следното множество:

- $B \subseteq N$
- $o \in B$
- ако $X \notin B$, то $s(X) \in B$

$B = ?$

- $B = \{o, s(s(o)), s(s(s(s(o)))), \ldots\}$
- $B = \{o, s(o), s(s(s(o))), s(s(s(s(s(o))))), \ldots\}$

И двете множества са минимални!

Монотонни оператори

Имаме нужда от формален подход към индукцията. За основа ще използваме теория на множествата.

Монотонни оператори

Имаме нужда от формален подход към индукцията. За основа ще използваме теория на множествата.
Нека фиксираме непразно множество U (универсум).

Монотонни оператори

Имаме нужда от формален подход към индукцията. За основа ще използваме теория на множествата.

Нека фиксираме непразно множество U (универсум).

С $\mathcal{P}(U) := \{X \subseteq U\}$ означаваме множеството от всички подмножества на U.

Монотонни оператори

Имаме нужда от формален подход към индукцията. За основа ще използваме теория на множествата.
Нека фиксираме непразно множество U (универсум).
С $\mathcal{P}(U) := \{X \subseteq U\}$ означаваме множеството от всички подмножества на U.

Дефиниция

Оператор над U наричаме тотална функция $\Gamma : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$.

Монотонни оператори

Имаме нужда от формален подход към индукцията. За основа ще използваме теория на множествата.
Нека фиксираме непразно множество U (универсум).
С $\mathcal{P}(U) := \{X \subseteq U\}$ означаваме множеството от всички подмножества на U.

Дефиниция

Оператор над U наричаме тотална функция $\Gamma : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(U)$.

Дефиниция

Операторът Γ наричаме *монотонен*, ако за произволни $X \subseteq Y$ е вярно, че $\Gamma(X) \subseteq \Gamma(Y)$.

Примери за монотонни оператори

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$
- $\Gamma_5(X) := X \cup \{o\}$

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$
- $\Gamma_5(X) := X \cup \{o\}$
- $\Gamma_6(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ за произволна функция $f : U \to U$

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$
- $\Gamma_5(X) := X \cup \{o\}$
- $\Gamma_6(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ за произволна функция $f : U \to U$
- Ако Γ' и Γ'' са монотонни, то $\Delta_1(X) := \Gamma'(X) \cup \Gamma''(X)$ и $\Delta_2(X) := \Gamma'(X) \cap \Gamma''(X)$ са монотонни

Примери за монотонни оператори

$\emptyset$ U

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$ y
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$ $\forall Y \subseteq U$ $\emptyset$
- $\Gamma_5(X) := X \cup \{o\}$ $\{X \mid o \in X\}$ $\{o\}$
- $\Gamma_6(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ за произволна функция $f : U \to U$ $\emptyset$
- Ако Γ' и Γ'' са монотонни, то $\Delta_1(X) := \Gamma'(X) \cup \Gamma''(X)$ и $\Delta_2(X) := \Gamma'(X) \cap \Gamma''(X)$ са монотонни
- $\Gamma_7(X) := \{o\} \cup \{s(x) \mid x \in X\}$.

Примери за монотонни оператори

- $\Gamma_1(X) := \emptyset, \quad \Gamma_2(X) := U$
- $\Gamma_3(X) := Y$ за произволно фиксирано $Y \subseteq U$
- $\Gamma_4(X) := X$
- $\Gamma_5(X) := X \cup \{o\}$
- $\Gamma_6(X) := \{f(x) \mid x \in X\}$ за произволна функция $f : U \to U$
- Ако Γ' и Γ'' са монотонни, то $\Delta_1(X) := \Gamma'(X) \cup \Gamma''(X)$ и $\Delta_2(X) := \Gamma'(X) \cap \Gamma''(X)$ са монотонни
- $\Gamma_7(X) := \{o\} \cup \{s(x) \mid x \in X\}$.

Интуиция: монотонните оператори само добавят, но не премахват елементи от аргумента си.

Неподвижни точки

Дефиниция

Множеството X наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(X) = X$.

Неподвижни точки

Дефиниция

Множеството X наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(X) = X$.

Кои са неподвижните точки на операторите Γ_i?

Неподвижни точки

Дефиниция

Множеството X наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(X) = X$.

Кои са неподвижните точки на операторите Γ_i?

Пример: N е неподвижна точка на Γ_7.

Неподвижни точки

Дефиниция

Множеството X наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(X) = X$.

Кои са неподвижните точки на операторите Γ_i?

Пример: N е неподвижна точка на Γ_7.

Може ли един оператор да има повече от една неподвижна точка?

Неподвижни точки

Дефиниция

Множеството X наричаме *неподвижна точка* на оператора Γ, ако $\Gamma(X) = X$.

Кои са неподвижните точки на операторите Γ_i?

Пример: N е неподвижна точка на Γ_7.

Може ли един оператор да има повече от една неподвижна точка?

За да използваме неподвижна точка за дефиниция на множество трябва да казваме коя от тях имаме предвид.

Теорема на Knaster-Tarski

Теорема

Ако Γ *е монотонен оператор, то той има единствена най-малка неподвижна точка* X_Γ.

Теорема на Knaster-Tarski

Теорема

Ако Γ е монотонен оператор, то той има единствена най-малка неподвижна точка X_Γ.

Доказателство.

Дефинираме

$$X_\Gamma := \bigcap \{X \subseteq U \mid \Gamma(X) \subseteq X\}.$$

$\square$