Редукции

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

12–19 март 2019 г.

Операционна семантика на λ-смятането

Основно изчислително правило в λ-смятането:

$$(\lambda_x M)N \quad \stackrel{\beta}{\to} \quad M[x \mapsto N]$$

Операционна семантика на λ-смятането

Основно изчислително правило в λ-смятането:

$$\underbrace{(\lambda_x M)N}_{\beta\text{-редекс}} \quad \xrightarrow{\beta} \quad \underbrace{M[x \mapsto N]}_{\beta\text{-редукт}}$$

В един терм може да има повече от един β-редекс.

$$\underbrace{(\lambda_x x)(\lambda_y y)}_{\beta}(\lambda_z z)$$

$$((\lambda_x x)\, y)\,((\lambda_x x)\, y) \to (\lambda_y y)(\lambda_z z)$$

$$(\lambda_x x)((\lambda_y y)(\lambda_z z)) \to (\lambda_x x)(\lambda_z z)$$

Операционна семантика на λ-смятането

Основно изчислително правило в λ-смятането:

$$\underbrace{(\lambda_x M)N}_{\beta\text{-редекс}} \quad \stackrel{\beta}{\rightarrow} \quad \underbrace{M[x \mapsto N]}_{\beta\text{-редукт}}$$

В един терм може да има повече от един β-редекс.
Искаме да можем да прилагаме редукцията на произволна позиция в терма!

Подтерм

Дефиниция (Подтермове)

Дефинираме функцията $Sub : \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, задаваща множество от подтермове на даден терм:

1. $Sub(x) := \{x\}$
2. $Sub(M_1 M_2) := Sub(M_1) \cup Sub(M_2) \cup \{M_1 M_2\}$
3. $Sub(\lambda_x N) := Sub(N) \cup \{\lambda_x N\}$

Подтерм

Дефиниция (Подтермове)

Дефинираме функцията $Sub : \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, задаваща множество от подтермове на даден терм:

1. $Sub(x) := \{x\}$
2. $Sub(M_1 M_2) := Sub(M_1) \cup Sub(M_2) \cup \{M_1 M_2\}$
3. $Sub(\lambda_x N) := Sub(N) \cup \{\lambda_x N\}$

Ако $M \in Sub(N)$ пишем $M \leq N$.

Подтерм

Дефиниция (Подтермове)

Дефинираме функцията $Sub : \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, задаваща множество от подтермове на даден терм:

1. $Sub(x) := \{x\}$
2. $Sub(M_1 M_2) := Sub(M_1) \cup Sub(M_2) \cup \{M_1 M_2\}$
3. $Sub(\lambda_x N) := Sub(N) \cup \{\lambda_x N\}$

Ако $M \in Sub(N)$ пишем $M \leq N$.

Примери: $\lambda_x x$, $\lambda_{x,y} xy$, $x(\lambda_y xy)$ $\{x, y, xy, \lambda_y(xy), x(\lambda_y xy)\}$

Подтерм

Дефиниция (Подтермове)

Дефинираме функцията $Sub : \Lambda \Rightarrow \mathcal{P}(\Lambda)$, задаваща множество от подтермове на даден терм:

1. $Sub(x) := \{x\}$
2. $Sub(M_1 M_2) := Sub(M_1) \cup Sub(M_2) \cup \{M_1 M_2\}$
3. $Sub(\lambda_x N) := Sub(N) \cup \{\lambda_x N\}$

Ако $M \in Sub(N)$ пишем $M \leq N$.

Примери: $\lambda_x x$, $\lambda_{x,y} xy$, $x(\lambda_y xy)$

Задача

Докажете, че релацията $\leq$ е частична наредба, т.е. че е рефлексивна, транзитивна и антисиметрична.

Подтерм: алтернативни дефиниции

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №1)

1. $M \preceq M$
2. Ако $MN \preceq P$, то $M \preceq P$ и $N \preceq P$
3. Ако $\lambda_x M \preceq N$, то $M \preceq N$

Подтерм: алтернативни дефиниции

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №1)

1. $M \preceq M$
2. Ако $MN \preceq P$, то $M \preceq P$ и $N \preceq P$
3. Ако $\lambda_x M \preceq N$, то $M \preceq N$

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №2)

1. $M \trianglelefteq M$
2. Ако $M \trianglelefteq N$ и $P \in \Lambda$, то $M \trianglelefteq NP$ и $M \trianglelefteq PN$
3. Ако $M \trianglelefteq N$ и $x \in V$, то $M \trianglelefteq \lambda_x N$

Подтерм: алтернативни дефиниции

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №1)

1. $M \preceq M$
2. Ако $MN \preceq P$, то $M \preceq P$ и $N \preceq P$
3. Ако $\lambda_x M \preceq N$, то $M \preceq N$

Дефиниция (Подтерм, алтернативна дефиниция №2)

1. $M \trianglelefteq M$
2. Ако $M \trianglelefteq N$ и $P \in \Lambda$, то $M \trianglelefteq NP$ и $M \trianglelefteq PN$
3. Ако $M \trianglelefteq N$ и $x \in V$, то $M \trianglelefteq \lambda_x N$

Задача

Докажете, че трите дефиниции за подтерм са еквивалентни, т.е. $M \leq N \iff M \preceq N \iff M \trianglelefteq N$.

λ-затваряне

Трябва да формализираме идеята за "на произволно място в терма".

λ-затваряне

Трябва да формализираме идеята за "на произволно място в терма".

Дефиниция (λ-затваряне)

Нека е $R \subseteq \Lambda^2$ е редукция.

λ-затваряне

Трябва да формализираме идеята за "на произволно място в терма".

Дефиниция (λ-затваряне)

Нека е $R \subseteq \Lambda^2$ е редукция. Дефинираме индуктивно релацията R^λ:

1. Ако $(M, N) \in R$, то $(M, N) \in R^\lambda$ (т.е. $R \subseteq R^\lambda$)
2. Ако $(M, N) \in R^\lambda$, $P \in \Lambda$ и $x \in V$, то
   - $(MP, NP) \in R^\lambda$,
   - $(PM, PN) \in R^\lambda$,
   - $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in R^\lambda$.

λ-затваряне

Трябва да формализираме идеята за "на произволно място в терма".

Дефиниция (λ-затваряне)

Нека е $R \subseteq \Lambda^2$ е редукция. Дефинираме индуктивно релацията R^λ:

1. Ако $(M, N) \in R$, то $(M, N) \in R^\lambda$ (т.е. $R \subseteq R^\lambda$)
2. Ако $(M, N) \in R^\lambda$, $P \in \Lambda$ и $x \in V$, то
   - $(MP, NP) \in R^\lambda$,
   - $(PM, PN) \in R^\lambda$,
   - $(\lambda_x M, \lambda_x N) \in R^\lambda$.

Ако $R^\lambda = R$, казваме че R е λ-*съвместима*.

λ-затваряне: примери и свойства

Пример: $\equiv$ и $\stackrel{\alpha}{=}$ са λ-съвместими.

λ-затваряне: примери и свойства

Пример: $\equiv$ и $\stackrel{\alpha}{=}$ са λ-съвместими. Други примери?

λ-затваряне: примери и свойства

Пример: $\equiv$ и $\stackrel{\alpha}{=}$ са λ-съвместими. Други примери?

λ-съвместима ли е релацията $\leq$? Защо?

λ-затваряне: примери и свойства

Пример: $\equiv$ и $\stackrel{\alpha}{=}$ са λ-съвместими. Други примери?

λ-съвместима ли е релацията $\leq$? Защо?

Пример: Нека фиксираме $x \in V$ и нека $R := \{(x, P) \mid P \in \Lambda\}$. $R^\lambda = ?$

$R^\lambda = \{(M,N) \mid x \in VAR(M), N \equiv M[x \mapsto P], P \in \Lambda\}$

$(\lambda_x x, \lambda_x y) \in R^\lambda$

$(\lambda_x x, z) \notin R^\lambda$

$(x, y) \in R$

λ-затваряне: примери и свойства

Пример: $\equiv$ и $\stackrel{\alpha}{=}$ са λ-съвместими. Други примери?

λ-съвместима ли е релацията $\leq$? Защо?

Пример: Нека фиксираме $x \in V$ и нека $R := \{(x, P) \mid P \in \Lambda\}$. $R^\lambda =$?

Задача

Докажете, че за произволно $R \subseteq \Lambda^2$, R^λ е λ-съвместима.

λ-контексти

Нека фиксираме специална променлива $[] \notin V$.

Дефиниция (λ-контекст)

Дефинираме множеството $\Lambda^{[]} \subseteq \Lambda$:

1. $[] \in \Lambda^{[]}$

$\lambda^{[]}$

2. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $M \in \Lambda$, то $ME, EM \in \Lambda^{[]}$
3. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $x \in V$, то $\lambda_x E \in \Lambda^{[]}$.

λ-контексти

Нека фиксираме специална променлива $[] \in V$.

Дефиниция (λ-контекст)

Дефинираме множеството $\Lambda^{[]} \subseteq \Lambda$:

1. $[] \in \Lambda^{[]}$
2. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $M \in \Lambda$, то $ME, EM \in \Lambda^{[]}$
3. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $x \in V$, то $\lambda_x E \in \Lambda^{[]}$.

Ще отбелязваме $E[M] := E[[] \mapsto M]$, при която субституция се отказваме от конвенцията, т.е. позволяваме прихващане.

$E := \lambda_{x,y}[]x$ $M := xy$

$E[M] \equiv \lambda_{x,y}xyx$

λ-контексти

Нека фиксираме специална променлива $[] \in V$.

Дефиниция (λ-контекст)

Дефинираме множеството $\Lambda^{[]} \subseteq \Lambda$:

1. $[] \in \Lambda^{[]}$
2. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $M \in \Lambda$, то $ME, EM \in \Lambda^{[]}$
3. Ако $E \in \Lambda^{[]}$ и $x \in V$, то $\lambda_x E \in \Lambda^{[]}$.

Ще отбелязваме $E[M] := E[[] \mapsto M]$, при която субституция се отказваме от конвенцията, т.е. позволяваме прихващане.

Задача

Да се докаже, че:

1. $M \leq E[M]$ *за произволни* $M \in \Lambda$ *и* $E \in \Lambda^{[]}$
2. *Ако* $M \leq N$, *то съществува* $E \in \Lambda^{[]}$ *такова, че* $E[M] \equiv N$

Изразяване на λ-затваряне чрез контекст

Задача

Нека $R \subseteq \Lambda^2$ *е произволна редукция.*
Да се докаже, че $(M, N) \in R^\lambda$ *тогава и само тогава, когато съществуват* $E \in \Lambda^{[]}$ *и два подтерма* $M' \leq M$ *и* $N' \leq N$*, такива че:*

1. $E[M'] \equiv M$
2. $E[N'] \equiv N$
3. $(M', N') \in R$.

β-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\beta}$, β-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \{((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N]) \mid M, N \in \Lambda, x \in V\}.$$

β-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\beta}$, β-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \left\{ \left((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N] \right) \mid M, N \in \Lambda, x \in V \right\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\beta} := \beta^\lambda$ **(β-редукция)**

β-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\beta}$, β-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \{((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N]) \mid M, N \in \Lambda, x \in V\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\beta} := \beta^\lambda$ **(β-редукция)**
- $\xleftarrow{\beta} := (\xrightarrow{\beta})^{-1} := \left\{(M, N) \mid N \xrightarrow{\beta} M\right\}$ **(β-експанзия)**

β-редукция

Дефиниция ($\stackrel{\beta}{\to}$, β-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \left\{ \left((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N] \right) \mid M, N \in \Lambda, x \in V \right\}.$$

Дефинираме

- $\stackrel{\beta}{\to} := \beta^\lambda$ **(β-редукция)**
- $\stackrel{\beta}{\leftarrow} := (\stackrel{\beta}{\to})^{-1} := \left\{ (M, N) \mid N \stackrel{\beta}{\to} M \right\}$ **(β-експанзия)**
- $\stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} := \beta^{\lambda,R,T} = (\stackrel{\beta}{\to})^{R,T}$ **(многостъпкова β-редукция)**

β-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\beta}$, β-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\beta := \left\{\left((\lambda_x M)N, M[x \mapsto N]\right) \mid M, N \in \Lambda, x \in V\right\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\beta} := \beta^\lambda$ **(β-редукция)**
- $\xleftarrow{\beta} := (\xrightarrow{\beta})^{-1} := \left\{(M, N) \mid N \xrightarrow{\beta} M\right\}$ **(β-експанзия)**
- $\overset{\beta}{\twoheadrightarrow} := \beta^{\lambda,R,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,T}$ **(многостъпкова β-редукция)**
- $\overset{\beta}{=} := \beta^{\lambda,R,S,T} = (\xrightarrow{\beta})^{R,S,T} = (\overset{\beta}{\twoheadrightarrow})^{S,T}$ **(β-еквивалентност)**

Примери за β-редукция

Примери:

- $(\lambda_x x)y \xrightarrow{\beta} x[x \mapsto y] \equiv y$

Примери за β-редукция

Примери:

- $(\lambda_x x)y$
- $\lambda_z \underbrace{(\lambda_{x,y} x)(\lambda_u u)}_{\beta}(\lambda_u uzu)z \xrightarrow{\beta}$

Примери за β-редукция

Примери:

- $(\lambda_x x)y$
- $\lambda_z(\lambda_{x,y} x)(\lambda_u u)(\lambda_u uzu)z$
- $(\lambda_x xz)((\lambda_y zy)z)$

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$

$$b_y((\lambda_x xy)y) = (\lambda 0 1)0$$

$$\big\downarrow \beta$$

$$01[0 \mapsto 0]$$

$$= 01$$

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\stackrel{\beta}{\to}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \stackrel{\beta}{\to} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \stackrel{\beta}{\to} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \xrightarrow{\beta}$?

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\stackrel{\beta}{\to}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \stackrel{\beta}{\to} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \stackrel{\beta}{\to} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \stackrel{\beta}{\to}\ ?$
- $\cancel{(02)[0 \mapsto 1] \equiv\ ?}$

$$\uparrow^{-1}((02)[0 \mapsto 1]) = \uparrow^{-1}(12) \equiv 01$$

β-редукция на безименни термове

$\downarrow_0 := \uparrow^{-1}$

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1}(M[0 \mapsto N])$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \xrightarrow{\beta}$?
- $(02)[0 \mapsto 1] \equiv$?
- Откъде идва проблемът и как да го решим?

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} M[0 \mapsto N]$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \xrightarrow{\beta} ?$
- $(02)[0 \mapsto 1] \equiv ?$
- Откъде идва проблемът и как да го решим?

β-редукция на безименни термове

Как да дефинираме $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^*?

$$(\lambda M)N \xrightarrow{\beta} \uparrow^{-1} (M[0 \mapsto \uparrow^1 N])$$

Пример:

- $(\lambda_x xy)y \xrightarrow{\beta} yy$
- разглеждаме контекст $\Gamma := y, z$, т.е. индексът на y е 1
- $(\lambda 02)1 \xrightarrow{\beta}$?
- $(02)[0 \mapsto 1] \equiv$?
- Откъде идва проблемът и как да го решим?

β-редукция на безименни термове (2)

Задача

Да се дефинира формално релацията $\xrightarrow{\beta}$ за Λ^* и да се докаже, че двете β-редукции са съгласувани, т.е. за произволен контекст от имена Γ:

1. *Ако $M, N \in \Lambda_{\mathrm{dom}\,\Gamma}$ и $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\flat_\Gamma(M) \xrightarrow{\beta} \flat_\Gamma(N)$.*
2. *Ако $M, N \in \Lambda_{|\Gamma|}$ и $M \xrightarrow{\beta} N$, то $\exists P \overset{\alpha}{=} \sharp_\Gamma(N)$ такова, че $\sharp_\Gamma(M) \xrightarrow{\beta} P$.*

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III $\xrightarrow{\beta} II \xrightarrow{\beta} I$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$ $\equiv \lambda_x I$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS \xrightarrow{\beta}\!\!\!\!\to S$

$KISS \xrightarrow{\beta} K^*SS \xrightarrow{\beta} IS \xrightarrow{\beta} S$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- $K^* IKIK^*$

I

K^*

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- K^*IKIK^*
- $SIII$

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- $K^* IKIK^*$
- $SIII$
- SKK

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- $K^* IKIK^*$
- $SIII$
- SKK
- SKS

Стандартни комбинатори

- $I := \lambda_x x$
- $K := \lambda_{x,y} x$
- $K^* := \lambda_{x,y} y$
- $S := \lambda_{x,y,z} xz(yz)$

Да се редуцират:

- III
- $KISS$
- K^*IKIK^*
- $SIII$
- SKK
- SKS
- SK

Комбинаторите K и S

Оказва се, че комбинаторите S и K са достатъчни да изразят всички λ-термове!

Комбинаторите K и S

Оказва се, че комбинаторите S и K са достатъчни да изразят всички λ-термове!

$SKK \not\equiv SKS$

Лема 1

Нека $M, N \in \Lambda$. Тогава

1. $\lambda_x x \stackrel{\beta}{=} SKK$,
2. $\lambda_x M \stackrel{\beta}{=} KM$, *ако* $x \notin \mathrm{FV}(M)$,
3. $\lambda_x MN \stackrel{\beta}{=} S(\lambda_x M)(\lambda_x N)$.

Комбинаторите K и S

Оказва се, че комбинаторите S и K са достатъчни да изразят всички λ-термове!

Лема 1

Нека $M, N \in \Lambda$. *Тогава*

1. $\lambda_x x \stackrel{\beta}{=} SKK$,
2. $\lambda_x M \stackrel{\beta}{=} KM$, *ако* $x \notin \mathrm{FV}(M)$,
3. $\lambda_x MN \stackrel{\beta}{=} S(\lambda_x M)(\lambda_x N)$.

- K^*

Комбинаторите K и S

Оказва се, че комбинаторите S и K са достатъчни да изразят всички λ-термове!

Лема 1

Нека $M, N \in \Lambda$. *Тогава*

1. $\lambda_x x \stackrel{\beta}{=} SKK$,
2. $\lambda_x M \stackrel{\beta}{=} KM$, *ако* $x \notin \mathrm{FV}(M)$,
3. $\lambda_x MN \stackrel{\beta}{=} S(\lambda_x M)(\lambda_x N)$.

- K^*
- $\lambda_{x,y} xy$

Комбинаторна логика

Дефиниция (Апликативни термове, $A\Lambda$)

1. Ако $x \in V$, то $x \in A\Lambda$.
2. Ако $M, N \in A\Lambda$, то $MN \in A\Lambda$.

Комбинаторна логика

Дефиниция (Апликативни термове, $A\Lambda$)

1. Ако $x \in V$, то $x \in A\Lambda$.
2. Ако $M, N \in A\Lambda$, то $MN \in A\Lambda$.

Задача

Нека k и s са две фиксирани променливи от V.
Да се дефинира изображение $\Phi : \Lambda \to A\Lambda$, което превежда произволен λ-терм в апликативен, т.е. да се покаже, че за произволно $M \in \Lambda$:

1. $\mathrm{FV}(\Phi(M)) \subseteq \mathrm{FV}(M) \cup \{k, s\}$ *и*
2. $M \stackrel{\beta}{=} \Phi(M)[k \mapsto K][s \mapsto S]$.

Комбинаторна логика

Дефиниция (Апликативни термове, $A\Lambda$)

1. Ако $x \in V$, то $x \in A\Lambda$.
2. Ако $M, N \in A\Lambda$, то $MN \in A\Lambda$.

Задача

Нека k и s са две фиксирани променливи от V.
Да се дефинира изображение $\Phi : \Lambda \to A\Lambda$, което превежда произволен λ-терм в апликативен, т.е. да се покаже, че за произволно $M \in \Lambda$:

1. $\mathrm{FV}(\Phi(M)) \subseteq \mathrm{FV}(M) \cup \{k, s\}$ *и*
2. $M \stackrel{\beta}{=} \Phi(M)[k \mapsto K][s \mapsto S]$.

Да се направи програмна реализация на изображението Φ.

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?
- ...да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?
- ...да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Каква е оценката на:

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?
- ...да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Каква е оценката на:

- $|M[x \mapsto N]|$?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?
- ...да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Каква е оценката на:

- $|M[x \mapsto N]|$?
- $|N|$, ако $M \stackrel{\beta}{\to} N$?

Дължина на терм след редукция

Дефиниция (дължина на терм, $|M|$)

- $|x| := 1$
- $|MN| := |M| + |N|$
- $|\lambda_x M| := |M| + 1.$

Възможно ли е...

- ...дължината на терм да се запази след редукция?
- ...дължината на терм да нарасне след редукция?
- ...да имаме безкрайна редица от редукции?
- ...да имаме редукционна редица от нарастващи термове?

Каква е оценката на:

- $|M[x \mapsto N]|$?
- $|N|$, ако $M \xrightarrow{\beta} N$?
- $|M_k|$, ако $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_k$?

Операционна еквивалентност

Релацията $\stackrel{\beta}{=}$ може да се разглежда като *операционна еквивалентност* на термове,

Операционна еквивалентност

Релацията $\stackrel{\beta}{=}$ може да се разглежда като *операционна еквивалентност* на термове,

т.е. два терма са β-еквивалентни, ако чрез поредица от изчисления можем да стигнем от единия до другия.

Операционна еквивалентност

Релацията $\stackrel{\beta}{=}$ може да се разглежда като *операционна еквивалентност* на термове,
т.е. два терма са β-еквивалентни, ако чрез поредица от изчисления можем да стигнем от единия до другия.

Дефиниция (Операционна еквивалентност)

Казваме, че в λ-смятането два терма M и N са *операционно еквивалентни*, ако $M \stackrel{\beta}{=} N$ и бележим $\lambda \models M = N$.

Операционна еквивалентност

Релацията $\stackrel{\beta}{=}$ може да се разглежда като *операционна еквивалентност* на термове,
т.е. два терма са β-еквивалентни, ако чрез поредица от изчисления можем да стигнем от единия до другия.

Дефиниция (Операционна еквивалентност)

Казваме, че в λ-смятането два терма M и N са *операционно еквивалентни*, ако $M \stackrel{\beta}{=} N$ и бележим $\lambda \models M = N$.

Операционното еквивалентност е вид *интенсионално равенство*, т.е. равенство на термовете, което е породено от тяхната вътрешна структура.

Екстенсионално равенство

В теорията на множествата имаме *Аксиома за екстенсионалност*:

$$\forall_{X,Y}\big(\forall_Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \to X = Y\big),$$

Екстенсионално равенство

В теорията на множествата имаме *Аксиома за екстенсионалност*:

$$\forall_{X,Y}\big(\forall_Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \to X = Y\big),$$

т.е. две множества считаме за равни, ако се състоят от равни елементи.

Екстенсионално равенство

В теорията на множествата имаме *Аксиома за екстенсионалност*:

$$\forall_{X,Y}\big(\forall_Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \to X = Y\big),$$

т.е. две множества считаме за равни, ако се състоят от равни елементи.

В λ-смятането казваме, че два терма са *екстенсионално равни*, ако те имат еднакво поведение, независимо, че може да са различни по структура.

Екстенсионално равенство

В теорията на множествата имаме *Аксиома за екстенсионалност*:

$$\forall_{X,Y}\big(\forall_Z(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \to X = Y\big),$$

т.е. две множества считаме за равни, ако се състоят от равни елементи.

В λ-смятането казваме, че два терма са *екстенсионално равни*, ако те имат еднакво поведение, независимо, че може да са различни по структура.

Пример: $\lambda_x fx \overset{\beta}{\neq} f$, но за произволен терм M имаме $(\lambda_x fx)M \overset{\beta}{=} fM$.

Екстенсионално равенство на термове

Дефиниция (екстенсионално равенство)

Казваме, че M и N са екстенсионално равни и бележим $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$, ако

1. $\lambda \models M = N$,
2. за произволно $x \notin \mathrm{FV}(MN)$ е вярно, че $\lambda + \mathrm{ext} \models Mx = Nx$.

Екстенсионално равенство на термове

Дефиниция (екстенсионално равенство)

Казваме, че M и N са екстенсионално равни и бележим $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$, ако

1. $\lambda \models M = N$,
2. за произволно $x \notin \mathrm{FV}(MN)$ е вярно, че $\lambda + \mathrm{ext} \models Mx = Nx$.

Задача

Да се докаже, че релацията $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$ е λ-съвместима релация на еквивалентност.

η-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \mathrm{FV}(M)\}.$$

η-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \mathrm{FV}(M)\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\eta} := \eta^{\lambda}$ (η-**редукция**)

η-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \mathrm{FV}(M)\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\eta} := \eta^\lambda$ **(η-редукция)**
- $\xleftarrow{\eta} := (\xrightarrow{\eta})^{-1} := \left\{(M, N) \mid N \xrightarrow{\eta} M\right\}$ **(η-експанзия)**

η-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \mathrm{FV}(M)\}.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\eta} := \eta^\lambda$ **(η-редукция)**
- $\xleftarrow{\eta} := (\xrightarrow{\eta})^{-1} := \left\{(M, N) \mid N \xrightarrow{\eta} M\right\}$ **(η-експанзия)**
- $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow} := \eta^{\lambda,R,T} = (\xrightarrow{\eta})^{R,T}$ **(многостъпкова η-редукция)**

η-редукция

Дефиниция ($\xrightarrow{\eta}$, η-редукция)

Нека разгледаме релацията

$$\eta := \{(\lambda_x Mx, M) \mid M \in \Lambda, x \notin \mathrm{FV}(M)\}\,.$$

Дефинираме

- $\xrightarrow{\eta} := \eta^{\lambda}$ **(η-редукция)**
- $\xleftarrow{\eta} := (\xrightarrow{\eta})^{-1} := \left\{(M, N) \mid N \xrightarrow{\eta} M\right\}$ **(η-експанзия)**
- $\overset{\eta}{\twoheadrightarrow} := \eta^{\lambda,R,T} = (\xrightarrow{\eta})^{R,T}$ **(многостъпкова η-редукция)**
- $\overset{\eta}{=} := \eta^{\lambda,R,S,T} = (\xrightarrow{\eta})^{R,S,T} = (\overset{\eta}{\twoheadrightarrow})^{S,T}$ **(η-еквивалентност)**

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

$\beta\eta$-еквивалентност $\iff$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.
β) По дефиниция

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \overset{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Индукция по $M \overset{\beta\eta}{=} N$.
β) По дефиниция
η) Тогава $M \equiv \lambda_x Nx$, откъдето следва по дефиниция.

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

$(\Leftarrow)$ Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.
β) По дефиниция
η) Тогава $M \equiv \lambda_x N x$, откъдето следва по дефиниция.

$(\Rightarrow)$ Индукция по $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ точно тогава, когато $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.
β) По дефиниция
η) Тогава $M \equiv \lambda_x Nx$, откъдето следва по дефиниция.

($\Rightarrow$) Индукция по $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.
Нека $\lambda + \mathrm{ext} \models Mx = Nx$ за произволно $x \notin \mathrm{FV}(MN)$.

$\beta\eta$-еквивалентност $\Longleftrightarrow$ екстенсионално равенство

Твърдение 1

$M \stackrel{\beta\eta}{=} N$ *точно тогава, когато* $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.

Доказателство.

($\Leftarrow$) Индукция по $M \stackrel{\beta\eta}{=} N$.
β) По дефиниция
η) Тогава $M \equiv \lambda_x Nx$, откъдето следва по дефиниция.

($\Rightarrow$) Индукция по $\lambda + \mathrm{ext} \models M = N$.
Нека $\lambda + \mathrm{ext} \models Mx = Nx$ за произволно $x \notin \mathrm{FV}(MN)$.
Тогава за всяко такова x по ИП имаме: $M \stackrel{\eta}{=} \lambda_x Mx \stackrel{\beta\eta}{=} \lambda_x Nx \stackrel{\eta}{=} N$. $\square$