Тема: логика, множества, релации, функции

Име: .... ФН: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
от максимално	15	25	15	30	85

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно. Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно. Идентичните решения ще бъдат анулирани.

Задача 1. Дадено е непразно множество S и едноместен предикат P над S. Казваме, че P е *силен* тогава и само тогава, когато $\exists x(P(x)) \rightarrow \forall y(P(y))$. Докажете или опровергайте, че за всеки силен предикат P е изпълнено $\forall x \forall y(P(x) \leftrightarrow P(y))$.

Задача 2. Дадени са три множества A, B и C. Нека

$$X = (A \cup B) \times (C \cap D)$$
$$Y = ((A \times C) \cap (A \times D)) \cup ((B \times C) \cap (B \times D))$$

Докажете или опровергайте, че $X = Y$.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Нека $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ като xRy тогава и само тогава, когато съществуват цяло k и естествено n, за които $\dfrac{x}{y} = 2^k$ и $xy = n^2$.

10 т. а) Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

5 т. б) Да се опише класът на еквивалентност, който съдържа числото 2019.

Задача 4. Дадени са множества A и B и функции $f, g : A \rightarrow B$.

а) Докажете или опровергайте, че

5 т. а.1) $f \cap g$ е частична функция.

5 т. а.2) $f \cap g$ е функция.

б) Докажете или опровергайте, че

5 т. б.1) ако $g \subseteq f$, то $f \cup g$ е функция.

5 т. б.2) $f \cup g$ е функция.

10 т. в) За всяко $n \in \mathbb{N}$ нека $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е следната частична функция:

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \leqslant n, \\ \text{недефинирана}, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Нека $h = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$. Докажете или опровергайте, че h е функция.