Тема: логика, множества, релации, функции

Име: .... ФН: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
от максимално	15	25	15	30	85

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно. Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно. Идентичните решения ще бъдат анулирани.

Задача 1. Дадено е непразно множество S и едноместен предикат P над S. Казваме, че P е *силен* тогава и само тогава, когато $\exists x(P(x)) \rightarrow \forall y(P(y))$. Докажете или опровергайте, че за всеки силен предикат P е изпълнено $\forall x \forall y(P(x) \leftrightarrow P(y))$.

Задача 2. Дадени са три множества A, B и C. Нека

$$X = (A \cup B) \times (C \cap D)$$
$$Y = ((A \times C) \cap (A \times D)) \cup ((B \times C) \cap (B \times D))$$

Докажете или опровергайте, че $X = Y$.

Задача 3. Нека $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Нека $R \subseteq \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ като xRy тогава и само тогава, когато съществуват цяло k и естествено n, за които $\dfrac{x}{y} = 2^k$ и $xy = n^2$.

10 т. а) Да се докаже, че R е релация на еквивалентност.

5 т. б) Да се опише класът на еквивалентност, който съдържа числото 2019.

Задача 4. Дадени са множества A и B и функции $f, g : A \rightarrow B$.

а) Докажете или опровергайте, че

5 т. а.1) $f \cap g$ е частична функция.

5 т. а.2) $f \cap g$ е функция.

б) Докажете или опровергайте, че

5 т. б.1) ако $g \subseteq f$, то $f \cup g$ е функция.

5 т. б.2) $f \cup g$ е функция.

10 т. в) За всяко $n \in \mathbb{N}$ нека $f_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ е следната частична функция:

$$f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{ако } x \leqslant n, \\ \text{недефинирана}, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Нека $h = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$. Докажете или опровергайте, че h е функция.

Примерни решения

Задача 1, решение 1. Да допуснем, че

$$\neg\forall x\forall y\Big(p(x)\longleftrightarrow p(y)\Big)\equiv\exists x\exists y\neg\Big(p(x)\longleftrightarrow p(y)\Big)\equiv\exists x\exists y\Big(p(x)\oplus p(y)\Big)$$

Нека $a, b \in S$, за които $p(a)\equiv T$ и $p(b)=F$. Тогава $\exists x\, p(x)\equiv T$, а $\forall y\, p(y)\equiv F$.
Получаваме $\exists x\, p(x)\longrightarrow\forall y\, p(y)\equiv F$, което е противоречие с условието.
Следователно $\forall x\forall y\Big(p(x)\longleftrightarrow p(y)\Big)$.

Задача 1, решение 2. Твърдението е вярно. Твърдението може да запишем така:

$$(\exists x(P(x))\to\forall y(P(y)))\to\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))$$

Да го препишем така:

$$(\exists x(P(x))\to\forall x(P(x)))\to\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))$$

Имаме право да го препишем по този начин, защото това е просто преименуване на променлива от y на x в обхвата на един квантор. Прилагаме двукратно свойството на импликацията $u\to v\equiv\neg u\vee v$:

$$\begin{aligned}
&(\exists x(P(x))\to\forall x(P(x)))\to\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))\equiv\\
&(\neg\exists x(P(x))\vee\forall x(P(x)))\to\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))\equiv\\
&\neg(\neg\exists x(P(x))\vee\forall x(P(x)))\vee\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))\equiv\qquad\text{// закон на De Morgan}\\
&(\neg\neg\exists x(P(x))\wedge\neg\forall x(P(x)))\vee\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))\equiv\\
&(\exists x(P(x))\wedge\exists x(\neg P(x)))\vee\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))
\end{aligned}$$

Това е вярно по следната причина. Ако предикатът е истина за поне един елемент и е лъжа за поне един елемент, то $\exists x(P(x))\wedge\exists x(\neg P(x))$ е истина, защото този израз казва точно това нещо. В противен случай или предикатът е истина върху всички елементи, или предикатът е лъжа върху всички елементи; с други думи, за всеки два елемента стойността на предиката е една и съща, а $\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))$ казва точно това.

Заклюачваме, че поне едното от $\exists x(P(x))\wedge\exists x(\neg P(x))$ и $\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))$ е истина. Тоест, дизюнкцията $(\exists x(P(x))\wedge\exists x(\neg P(x)))\vee\forall x\forall y(P(x)\leftrightarrow P(y))$ е истина.

Задача 2, решение. Твърдението е вярно. X и Y са множества от наредени двойки. Трябва да покажем, че наредена двойка (u, v) принадлежи на X т.с.т.к. тя принадлежи на Y. От дефинициите на X и Y веднага виждаме, че

$$\begin{aligned}
&(u,v)\in X\leftrightarrow(u\in A\vee u\in B)\wedge(v\in C\wedge v\in D)\\
&(u,v)\in Y\leftrightarrow(u\in A\wedge v\in C\wedge u\in A\wedge v\in D)\vee(u\in B\wedge v\in C\wedge u\in B\wedge v\in D)
\end{aligned}$$

Да моделираме със средствата на съждителната логика. Нека $u\in A$ е съждението p, $u\in B$ е q, $v\in C$ е r и $v\in D$ е s. Тогава

$$\begin{aligned}
&(u,v)\in X\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(r\wedge s)\\
&(u,v)\in Y\leftrightarrow(p\wedge r\wedge p\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge q\wedge s)
\end{aligned}$$

Да докажем, че $(u,v)\in X\leftrightarrow(u,v)\in Y$ е същото като да докажем, че

$$(p\vee q)\wedge(r\wedge s)\equiv(p\wedge r\wedge p\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge q\wedge s)$$

Наистина,

$$\begin{aligned}
&(p\wedge r\wedge p\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge q\wedge s)\equiv\qquad\text{// идемпотентност}\\
&(p\wedge r\wedge s)\vee(q\wedge r\wedge s)\equiv\\
&(p\wedge(r\wedge s))\vee(q\wedge(r\wedge s))\equiv\qquad\text{// дистрибутивност}\\
&(p\vee q)\wedge(r\wedge s)
\end{aligned}$$

Задача 3, решение. Първо ще докажем, че релацията е релация на еквивалентност.

- Нека $x \in \mathbb{N}^+$. Разглеждаме $k = 1$ и $n = x$, откъдето $\dfrac{x}{x} = 1$ и $x.x = x^2$, откъдето xRx. Понеже x е произволно избрано, то за всяко x е изпълнено xRx и R е рефлексивна.
- Нека xRy. Тогава $\dfrac{x}{y} = 2^k$ и $xy = n^2$ за някои $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Обаче $\dfrac{y}{x} = 2^{-k}$ и $yx = n^2$. Понеже $(-k) \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$, то yRx и R е симетрична.
- Нека xRy и yRz. Тогава $\dfrac{x}{y} = 2^{k_1}$, $xy = n_1^2$, $\dfrac{y}{z} = 2^{k_2}$ и $yz = n_2^2$, където $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Следователно $\dfrac{x}{z} = \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{y}{z} = 2^{k_1+k_2}$ и $(xy)(yz) = (n_1 n_2)^2$. Понеже k_1 и k_2 са цели, то $k_1 + k_2$ е също цяло. От друга страна, $xzy^2 = n_1^2 n_2^2$ и тогава xz е точен квадрат на естествено число (в частност това число е $\dfrac{n_1 n_2}{y}$). Оттук получаваме xRz. Следователно, R е транзитивна.

Така доказахме, че R е релация на еквивалентност.

Ще намерим класа на еквивалентност, съдържащ 2019. Нека x е такова число, за което $xR2019$. Следователно $\dfrac{x}{2019} = 2^k$ и $2019x = n^2$ за някое цяло k и естествено n. Тогава $x = 2019.2^k$ и $k \geqslant 0$ (иначе x не е цяло). Заместваме в $2019x = n^2$ и тогава $2019^2.2^k = n^2$. Оттук следва, че k е четно или $k = 2m$ за някое естествено m. Тогава $x = 2019.2^{2m}$. Класът на еквивалентност, съдържащ 2019 е $[2019] = \{2019.2^{2m} | m \in \mathbb{N}\}$. Директна проверка показва, че всеки елемент на това множество е в релация с 2019.

Задача 4, решение. Да допуснем, че $h = f \cap g$ не е частична функция. Тогава за някое a съществуват $b \neq c$, за които $(a, b) \in h$ и $(a, c) \in h$. Понеже $h \subseteq f$, то тогава $(a, b) \in f$ и $(a, c) \in f$. Следва, че f не е функция, в противоречие с първоначалното допускане. Следователно $f \cap g$ е частична функция.

Обаче $f \cap g$ не е непременно функция. Нека $A = \{0, 1\}$ и $B = \{a, b\}$. Нека $f = \{(0, a), (1, a)\}$ и $g = \{(0, b), (1, b)\}$. Тогава $f \cap g = \varnothing$, което е частична функция, но не е функция.

Ще покажем, че $f \cup g$ е функция, ако $g \subseteq f$. Нека $g \subseteq f$. От $g \subseteq f$ следва $f \cup g = f$, а по условие f е функция. Тогава $f \cup g$ е функция.

Ще покажем, че $f \cup g$ не е непременно функция в общия случай. Нека $A = \{0\}$ и $B = \{1, 2\}$. Нека $f = \{(0, 1)\}$ и $g = \{(0, 2)\}$. Тогава $f \cup g = \{(0, 1), (0, 2)\}$, което не е функция.

Нека $h = \bigcup_{i=0}^{\infty} f_i$. Първо ще покажем, че h е частична функция. Да допуснем, че h не е частична функция. Тогава съществуват $a, b, c \in \mathbb{N}$, за които $(a, b) \in h$, $(a, c) \in h$ и $b \neq c$. Обаче фактът, че $(a, b) \in h$ и $(a, c) \in h$ означава, че $(a, b) \in f_k$ и $(a, c) \in f_m$ за някои $k, m \in \mathbb{N}$. Без ограничения на общността нека $k \leqslant m$. Тогава $f_k \subseteq f_m$. Тогава $(a, b) \in f_m$. Но освен това $(a, c) \in f_m$ и понеже $b \neq c$, следва, че f_m не е функция. Получихме противоречие и оттам h е частична функция.

Сега ще докажем, че $f(a)$ е дефинирана за всяко $a \in \mathbb{N}$, както и че $f(a) = a$. Нека $a \in \mathbb{N}$. Тогава нека n е естествено и $n > a$. Следователно $f_n(a) = a$. Понеже $f_n \subseteq h$, получаваме $(a, a) \in h$. Следователно $h(a)$ е дефинирана и $h(a) = a$. Така h е тотална и $h(x) = x$.