Зад. 1

2 т. Дефинирайте "еквивалентност на съждения".

Нека $n \geq 2$ и $p_1, \ldots, p_n$ са прости съждения, две по две различни. Нека $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Нека B е множеството от всички възможни съставни съждения, които се изграждат от елементи на A чрез познатите Ви логически съюзи. Нека $Q(x, y)$ е двуместен предикат, чийто два домейна са $A \cup B$, дефиниран така: $\boxed{Q(x, y) \text{ е истина тогава и само тогава, когато } x \text{ и } y \text{ са еквивалентни.}}$ За всяко от следните твърдения отговорете дали е вярно или не:

2 т. • $\exists x \in A \ \exists y \in A : x \neq y \land Q(x, y)$.

2 т. • $\exists x \in B \ \exists y \in B : x \neq y \land Q(x, y)$.

2 т. • $\exists x \in A \ \exists y \in B : x \neq y \land Q(x, y)$.

2 т. • $\exists x \in B \ \exists y \in A : x \neq y \land Q(x, y)$.

Аргументирайте добре отговорите си.

Нека p, q и r са съждения. Използвайки еквивалентни преобразувания, докажете, че следните еквивалентности са в сила:

5 т. • $(p \land q) \to r \quad \equiv \quad p \to (q \to r)$.

5 т. • $(p \lor q) \to r \quad \equiv \quad (p \to r) \land (q \to r)$.

Можете да ползвате наготово законите на съждителната логика, изучавани на лекции, и само тях.

Решение: $\exists x \in A \ \exists y \in A : x \neq y \land Q(x, y)$ е лъжа, понеже няма как различни прости съждения да са еквивалентни. Това е обсъждано и изведено на лекции.

$\exists x \in B \ \exists y \in B : x \neq y \land Q(x, y)$ е истина: например, $\neg(p_1 \lor p_2)$ е еквивалентно на $\neg p_1 \land \neg p_2$ по Закона на Де Морган. $\exists x \in A \ \exists y \in B : Q(x, y)$ е истина, примерно p_1 е еквивалентно на $p_1 \land (p_1 \lor p_2)$, което доказахме на лекции. $\exists x \in B \ \exists y \in A : Q(x, y)$ е истина по същата причина.

$(p \land q) \to r \equiv$ // свойство на импликацията
$\neg(p \land q) \lor r \equiv$ // De Morgan
$(\neg p \lor \neg q) \lor r \equiv$ // асоциативност на дизюнкцията
$\neg p \lor (\neg q \lor r) \equiv$ // свойство на импликацията
$\neg p \lor (q \to r) \equiv$ // свойство на импликацията
$p \to (q \to r)$

$(p \lor q) \to r \equiv$ // свойство на импликацията
$\neg(p \lor q) \lor r \equiv$ // De Morgan
$(\neg p \land \neg q) \lor r \equiv$ // дистрибутивност на диз. спрямо кон.
$(\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r) \equiv$ // свойство на импликацията
$(p \to r) \land (q \to r)$

□

Зад. 2

1 т. Дефинирайте "релация на частична наредба".

За всяка релация $R \subseteq A \times A$ дефинираме *обратната релация на* R, която означаваме с "R^{-1}", по следния начин:

$$\forall x \in A \, \forall y \in A : (x, y) \in R^{-1} \text{ тогава и само тогава, когато } (y, x) \in R$$

За всеки две релации $R, Q \subseteq A \times A$ дефинираме *композицията на* R *с* Q, която означаваме с "$R \circ Q$", по следния начин:

$$\forall x \in A \, \forall y \in A : (x, y) \in R \circ Q \text{ тогава и само тогава, когато } \exists c \in A, \text{ такова че } (a, c) \in R \land (c, b) \in Q$$

6 т. Докажете или опровергайте, че ако R е релация на частична наредба, то R^{-1} е релация на частична наредба.

13 т. Докажете или опровергайте, че ако R и Q са релации на частична наредба, то $R \circ Q$ е релация на частична наредба.

Решение: R^{-1} също е частична наредба:

- Ще докажем, че ако R е рефлексивна, то R^{-1} е рефлексивна. Нека R е рефлексивна. Тогава $\forall a \in A : (a, a) \in R$. Тогава $\forall a \in A : (a, a) \in R^{-1}$.

- Ще докажем, че ако R е антисиметрична, то R^{-1} е антисиметрична. Нека R е антисиметрична. Тогава $\forall a, b \in A : aRb \land bRa \to a = b$. Но

$$\begin{aligned}
&\forall a, b \in A : aRb \land bRa \to a = b \equiv \\
&\neg\neg\forall a, b \in A : aRb \land bRa \to a = b \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg(aRb \land bRa \to a = b) \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg(\neg(aRb \land bRa) \lor a = b) \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : \neg\neg(aRb \land bRa) \land a \neq b \equiv \\
&\neg\exists a, b \in A : aRb \land bRa \land a \neq b
\end{aligned}$$

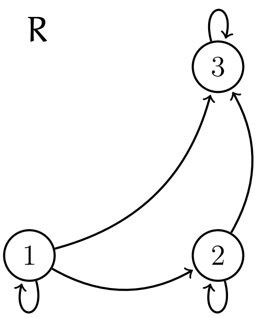
  Получихме резултат, който сме извеждали на лекции: релация да е антисиметрична е същото като да няма два различни елемента, всеки от които е в релация с другия. Очевидно е, че ако в R няма такива два елемента, то в R^{-1} също няма такива. С други думи, ако R е антисиметрична, то R^{-1} е антисиметрична.

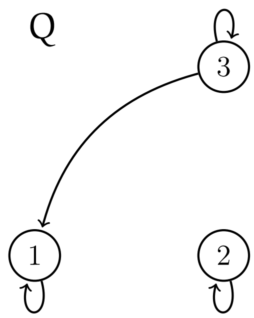
- Ще докажем, че ако R е транзитивна, то R^{-1} е транзитивна. Нека R е транзитивна. Тогава

$$\forall a, b, c \in A : aRb \land bRc \to aRc$$

  Разглеждаме произволни три, не непременно различни, елементи a, b, c от A, такива че $aRb \land bRc$. Ако няма такива, то R е транзитивна в празния смисъл, а също така и R^{-1}. Нека съществуват такива. Тогава $bR^{-1}a \land cR^{-1}b$. Заради комутативността на конюнкцията имаме право да напишем последното като $cR^{-1}b \land bR^{-1}a$. Щом R е транзитивна, то $aRb \land bRc$ влече aRc. Значи, aRc е в сила при това предположение. Но тогава $cR^{-1}a$. Следователно, $cR^{-1}b \land bR^{-1}a$ влече $cR^{-1}a$. Тогава R^{-1} е транзитивна.

Обаче $R \circ Q$ не е частична наредба. Ето контрапример. Нека R и Q са следните релации над $\{1, 2, 3\}$.

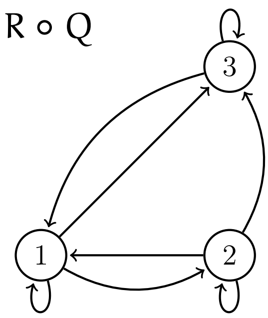




Очевидно R и Q са частични наредби. Да разгледаме $\mathsf{R} \circ \mathsf{Q}$.

$$
\begin{aligned}
&1\mathsf{R}1 \land 1\mathsf{Q}1 \rightarrow (1,1) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&2\mathsf{R}2 \land 2\mathsf{Q}2 \rightarrow (2,2) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&3\mathsf{R}3 \land 3\mathsf{Q}3 \rightarrow (3,3) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&1\mathsf{R}2 \land 2\mathsf{Q}2 \rightarrow (1,2) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&2\mathsf{R}3 \land 3\mathsf{Q}1 \rightarrow (2,1) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&1\mathsf{R}3 \land 3\mathsf{Q}3 \rightarrow (1,3) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&3\mathsf{R}3 \land 3\mathsf{Q}1 \rightarrow (3,1) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}\\
&2\mathsf{R}3 \land 3\mathsf{Q}3 \rightarrow (2,3) \in \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}
\end{aligned}
$$

От друга страна, единственият елемент, в който може да "отидем" от 3 спрямо R е самият 3. Но $(3,2) \notin \mathsf{Q}$. Следователно, $(3,2) \notin \mathsf{R} \circ \mathsf{Q}$.



$\mathsf{R} \circ \mathsf{Q}$ има контури, така че не е частична наредба.

$\square$

Зад. 3

2 т. Дефинирайте "релация на еквивалентност".

18 т. Колко релации от вида $\mathsf{R} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ са релации на еквивалентност? Дайте отговор-число.

Решение: От лекции знаем, че броят на релациите на еквивалентност е равен на броят на разбиванията на множеството, над чийто декартов квадрат е релацията. Ерго, трябва да намерим броя на всички разбивания на 5-елементно множество. Множеството от тези разбивания на свой ред се разбива съгласно броя на елементите (множества) в разбиване.

- Разбиване на едно множество. Има точно **1** такова.
- Разбиване на две множества.
  - Едното е с мощност 2, другото, с 3. Всяко такова разбиване се определя еднозначно от двуелементното множество. Има $\binom{5}{2} = 10$ такива.
  - Едното е с мощност 1, другото, с 4. Всяко такова разбиване се определя еднозначно от едноелементното множество. Има $\binom{5}{1} = 5$ такива.

  Общо има точно **15** такива.
- Разбиване на три множества.
  - Едното е с мощност 2, другото, с 2, третото, с 1. По 5 начина избираме едноелементното. За всеки такъв избор остават 4 елемента, които трябва да разбием на точно две двуелементни множества.

    Има точно 3 начина да сторим това – фиксирайки произволен елемент от четирите, има точно три избора на друг елемент, с който той да бъде заедно.

    Общо, начините са $5 \times 3 = 15$.
  - Едното е с мощност 3, другите две са с мощност 1 всяко. Изборът на това, кои три да бъдат заедно, определя еднозначно всяко такова разбиване. Има $\binom{5}{3} = 10$ начина да изберем три от пет.

  Общо има точно **25** такива.
- Разбиване на четири множества. Едното трябва да е с два елемента и останалите три да са с по един. Има $\binom{5}{2} = \mathbf{10}$ такива разбивания.
- Разбиване на пет множества. Има точно **1** такова.

Отговорът е $1 + 15 + 25 + 10 + 1 = 52$. □

Зад. 4 Нека $k \in \mathbb{N}^+$, $n \in \mathbb{N}^+$ и $k \leq n$. За всяка $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ казваме, че f е *строго растяща*, ако $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} : i < j \rightarrow f(i) < f(j)$. За всяка $f : \{1, 2, \ldots, k\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$ казваме, че f е *ненамаляваща*, ако $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} : i < j \rightarrow f(i) \leq f(j)$.

10 т. • Колко строго растящи функции с домейн $\{1, 2, \ldots, k\}$ и кодомейн $\{1, 2, \ldots, n\}$ има?

10 т. • Колко ненамаляващи функции с домейн $\{1, 2, \ldots, k\}$ и кодомейн $\{1, 2, \ldots, n\}$ има?

Решение: Броят на строго растящите се определя така. Всяка строго растяща функция от този вид се определя еднозначно от това, кои елементи от кодомейна са образи на елементи от домейна; не може един елемент от кодомейна да е образ на повече от един елемент от домейна, така че всяка такава функция е инекция. Но тези функции далеч не са всички инекции, а са само малка част от тях (от инекциите), защото образите са подредени в същия ред, в който са първообразите. И така, всяка такава функция се определя еднозначно от това, кои k елемента от общо n са образи. Има $\binom{n}{k}$ начина да изберем k елемента от n и това е отговорът.

Броят на ненамаляващите се определя по подобен начин. Сега не е необходимо функциите да са инекции. Всяка от тези функции се определя еднозначно от мултимножество с мощност k, чийто елементи са от кодомейна, който е с мощност n. Знаем, че има $\binom{k+n-1}{n-1}$ такива мултимножества. Това е отговорът на подзадачата. $\square$

Зад. 5 Дадена е квадратна матрица M с размери $n \times n$, където $n \geq 3$ и n е нечетно число. Редовете отгоре надолу и колоните отляво надясно са номерирани 1, 2, …, n. Клетката на ред i и колона j бележим с $M[i,j]$, за $1 \leq i, j \leq n$. Във всяка клетка се съдържа точно едно от $\{-1, 0, 1\}$. Нека

$$\begin{aligned}
\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_j &= \sum_{i=1}^{n} M[j,i] \\
\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : y_j &= \sum_{i=1}^{n} M[i,j] \\
z_1 &= \sum_{i=1}^{n} M[i,i] \\
z_2 &= \sum_{i=1}^{n} M[n-i+1,i]
\end{aligned}$$

Разгледайте

$$S = \{x_j \mid j \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \cup \{y_j \mid j \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \cup \{z_1, z_2\}$$

Кои от следните твърдения са верни винаги, тоест, за всяко запълване на M?

- $|S| > n + 2$.
- $|S| = n + 2$.
- $|S| < n + 2$.

Обосновете отговорите си.

Решение: Числата x_j са сумите по редове, y_j са сумите по колони, а z_1 и z_2 са сумите по двата големи диагонала.

И двете съждения

$$\begin{aligned}
&|S| > n + 2 \\
&|S| = n + 2
\end{aligned}$$

са лъжа, ако става дума за всяко запълване на M. Примерно, ако $\forall i \forall j : M[i,j] = 0$, то $|S| = 1$, така че $|S| \not> n + 2$ и $|S| \neq n + 2$.

Третото съждение също е лъжа. Ще покажем, че за всяко нечетно n (нечетността на n не е съществена за решението на задачата, просто n така е дадено) има запълване на M, при което $|S| \geq n + 2$. И по-точно, при което $\{-1, 0, 1, 2, \ldots, n\} \subseteq S$. Ако $n = 3$, следното запълване на M е такова:

$$\begin{array}{c|c|c|c|}
\cline{2-4}
3 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{2-4}
2 & 1 & 0 & 1 \\ \cline{2-4}
-1 & 0 & -1 & 0 \\ \cline{2-4}
\multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{2}
\end{array}$$

Сумите по редове, колони и единият главен диагонал са написани отстрани.

За всяко $n \geq 5$ ще докажем, че може да се конструира запълване със следните свойства:

- ред i има сума $n - i + 1$, за $1 \leq i \leq n$,
- големият диагонал долу-ляво-горе-дясно има сума 0, и
- една колона има сума -1.

Ето такова запълване за $n = 5$.

5	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1
3	1	1	−1	1	1
2	1	1	−1	0	1
1	−1	1	−1	1	1
0	3	5	−1	3	5

Важните суми са

- по редове 5, 4, …, 1;
- 0 по голemия диагонал;
- -1 в една от колоните.

Това са $5 + 2 = 7$ различни числа, които ни дават желаното доказателство при $n = 5$:

5	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1
3	1	1	−1	1	1
2	1	1	−1	0	1
1	−1	1	−1	1	1
0			−1		

Принципът на запълване на M е следният. Ред 1 е само с единици, така че има сума $n = 5$. Клетка $M[2, n-1]$ има 0, а останала част от ред 2 е само от единици. Така ред 2 има сума $n - 1 = 4$, а в големия диагонал вече имаме 1 и 0:

5	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1

В ред 3 слагаме едно -1, а останалите $n - 1$ клетки са с единици. Сумата в ред 3 става $n - 2 = 3$. Освен това, в големия диагонал вече имаме 1, 0 и -1, тоест нула. Оставащите клетки на големия диагонал са четен брой, така че, ако успеем да ги запълним с равен брой 1 и -1, ще имаме общо 0 по него:

5	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1
3	1	1	-1	1	1
		1			
	-1				
0					

Сума -1 може да получим в колона $n-2$. Засега имаме две единици и едно -1 в нея. Ако успеем да сложим още две -1 и останалите клетки в нея да имат сума нула (при $n = 5$ останали няма, понеже те са общо пет), ще имаме сума -1 в нея:

5	1	1	1	1	1
4	1	1	1	0	1
3	1	1	-1	1	1
		1	-1		
	-1		-1		
0			-1		

Сега вече не е трудно да запълним останалите клетки, така че на ред 1 да получим сума 1, а на ред 2 да получим сума 2.

Тази конструкция се обобщана по естествен начин за всяко нечетно n. Отново: най-горният ред е само с единици, вторият има една нула, третият има едно -1, сложени така, че по големия диагонал от горе-дясно към долу-ляво да има $1, 0, -1$. Всеки следващ ред надолу има сума с едно по-малка от реда над него; ако редът над него има само 1 и -1, то една единица (от реда над него) става нула, в противен случай или нула става -1, или още една единица става нула. Разполагането на числата върху редове 3, 4, ..., n е такова, че по големия диагонал да има еднакъв брой единици и минус-единици, а в третата колона отдясно наляво да има сума -1. Ето за $n = 7$:

7	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	0	1
5	1	1	1	1	-1	1	1
4	1	1	1	1	-1	0	1
3	1	1	-1	1	-1	1	1
2	1	1	-1	-1	0	1	1
1	-1	1	1	-1	0	0	1
0					-1		

□

Зад. 6 Колко думи с дължина 9 можем да съставим от буквите a, b и c

1 т. • без ограничения

19 т. • в които не се среща поддумата abc?

За целите на тази задача, дума е всяка (крайна) редица от букви. Не се иска думата да има смисъл в естествения език.

Решение: Буквите са три, позициите са девет. Ако няма ограничения, броят на думите е 3^9.

За да сметнем колко думи не съдържат abc като поддума, трябва от 3^9 да извадим броя на думите, които съдържат abc като поддума. Това ще направим с метода на включването и изключването. Нека X_i е множеството от думите, в които на позиция i започва поддума abc. Очевидно $i \in \{1, \dots, 7\}$.

Твърдим, че $|X_i| = 3^6$. Да видим първо колко е X_1. На позиции 1, 2 и 3 са фиксирани съответно a, b и c, а на останалите шест позиции няма ограничения, така че $|X_1| = 3^6$. Останалите X_i се получават аналогично.

Отговорът обаче не е просто

$$3^9 - 7 \times 3^6$$

защото някои множества X_i и X_j, $i \neq j$, имат непразни сечения. $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ по очевидни причини, но $X_1 \cap X_4 \neq \varnothing$. Лесно се вижда, че $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ (при $i \neq j$) тогава и само тогава, когато $|i - j| \geq 3$; в такъв случай $|X_i \cap X_j| = 3^3$. Има точно 10 ненаредени двойки индекси $\{i, j\}$, такива че $|i - j| \geq 3$:

$$\{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,7\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,7\}$$

И има точно едно сечение $X_i \cap X_j \cap X_k$ за индекси i, j и k, които са различни по двойки: то отговаря на думата abcabcabc. Ненаредената тройка индекси е $\{1, 4, 7\}$.

И така, точно

$$3^9 - 7 \times 3^6 + 10 \times 3^3 - 1 = 14\,849$$

думи не съдържат abc като поддума. □