

Решими термове

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

9 април 2019 г.

Проблеми с недефинираността

Дефиниция (λ -определимост)

Функцията $f(\vec{x})$ е λ -определима с $M \in \Lambda$, ако

- ако $f(\vec{x})$ е дефинирана, то $M c_{x_1} \dots c_{x_n} \stackrel{\beta}{=} c_{f(\vec{x})}$,
- ако $f(\vec{x})$ не е дефинирана, то $M c_{x_1} \dots c_{x_n}$ **няма нормална форма**.

Проблеми:

- 1 Концепцията за нормализируемост е чисто синтактична без хубав семантичен еквивалент.
- 2 Идентифицирането на термове без нормална форма не е консистентно.
- 3 λ -определимостта не е затворена **интенционално** относно композиция

Идентифициране на термове без нормална форма

Дефиниция

Дефинираме релацията на еквивалентност

$$\stackrel{\perp}{=} := \{(M, N) \mid M \text{ и } N \text{ нямат нормална форма}\}.$$

λ -съвместима ли е релацията $\stackrel{\perp}{=}$?

Твърдение 1

Нека $\stackrel{\beta\perp}{=} := (\stackrel{\perp}{=} \cup \beta)^{\lambda, R, S, T}$. Тогава $\stackrel{\beta\perp}{=}$ съвпада с Λ^2 .

Доказателство.

Нека $M, N \in \Lambda$. Разглеждаме $M' := \lambda_x x M \Omega$ и $N' := \lambda_x x N \Omega$. Тъй като $M' \stackrel{\perp}{=} N'$, то имаме

$$M \stackrel{\beta}{=} M' K \stackrel{\beta\perp}{=} N' K \stackrel{\beta}{=} N.$$



Проблеми с композиция на частични функции

Нека $f(n) := 0$ и $g := \emptyset$.

$F := K_{c_0}$ определя f , а $G := K_{\Omega}$ определя g .

$f \circ g = g$, но $F \circ G := \lambda_x F(Gx) \stackrel{\beta}{=} \lambda_x c_0$ определя $f!$

Въпреки това:

Теорема

Всяка ЧРФ е λ -определима.

Доказателство.

Използва се Теорема за нормалната форма на Kleene, според която всяка ЧРФ h може да се представи като

$$h(\vec{x}) := f(\mu_y g(\vec{x}, y)),$$

където f и g са примитивно рекурсивни. □

Решими термове

Трябва ни друга концепция за “недефинираност” в λ -смятането.

Дефиниция (Решим комбинатор)

Казваме, че M е *решим комбинатор*, ако $\exists \vec{N} (M\vec{N} \stackrel{\beta}{=} I)$.

Дефиниция (Затваряне на терм)

Нека $M \in \Lambda$ и $FV(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Тогава $\bar{M} := \lambda_{x_1, \dots, x_n} M$ наричаме *затваряне на терма M* .

Дефиниция (Решим терм)

Казваме, че M е *решим терм*, ако \bar{M} е решим комбинатор.

Идея: да моделираме недефинираността с нерешими термове.

Примери за решими термове

Решими ли са термовете:

- K
- S
- c_n
- $\lambda_x x / \Omega$
- Y
- Ω

Характеризация на решимите термове

Лема 1

M е решим точно тогава, когато има комбинатори \vec{N} и \vec{P} , така че $M[\vec{x} \mapsto \vec{P}]\vec{N} \stackrel{\beta}{=} I$, където $FV(M) = \{\vec{x}\}$.

Доказателство.

(\Rightarrow) Нека M е решим, тогава $(\lambda_{\vec{x}}M)\vec{N}\vec{P} \stackrel{\beta}{=} I$. Без ограничение на общността можем да считаме, че:

- \vec{N} и \vec{P} са затворени
- $|\vec{N}| = |\vec{x}|$

Тогава $(\lambda_{\vec{x}}M)\vec{N}\vec{P} \stackrel{\beta}{=} M[\vec{x} \mapsto \vec{P}]\vec{N} \stackrel{\beta}{=} I$.

(\Leftarrow) Тривиално. □

Характеризация на решимите термове

Лема 2

M е решим точно когато $\lambda_y M$ е решим.

Доказателство.

Съгласно Лема 1:

$$\begin{aligned}
 M \text{ е решим} &\iff M[y \mapsto Q][\vec{x} \mapsto \vec{N}]\vec{P} \stackrel{\beta}{=} I \text{ за някои } Q, \vec{N}, \vec{P} \\
 &\iff (\lambda_y M)[\vec{x} \mapsto \vec{N}]Q\vec{P} \stackrel{\beta}{=} I \text{ за някои } Q, \vec{N}, \vec{P} \\
 &\iff \lambda_y M \text{ е решим.}
 \end{aligned}$$

Следствие 1

Ако M е нерешим, то MN , $M[x \mapsto N]$ и $\lambda_x M$ са нерешими.

Главна нормална форма

Дефиниция (главна нормална форма)

Ако $M \equiv \lambda_{\vec{x}} y \vec{N}$, то казваме че M е в *главна нормална форма*.

Ако $P \stackrel{\beta}{=} M$, то казваме че P *има главна нормална форма*.

- всеки терм в нормална форма е в главна нормална форма
- има ли термове в главна нормална форма, които не са в нормална форма?
- има ли термове, които имат главна нормална форма, но нямат нормална форма?

Главен редекс и главна редукция

Дефиниция (Главен редекс)

Ако $M \equiv \lambda_{\vec{x}}(\lambda_y P)Q\vec{N}$, то $(\lambda_y P)Q$ наричаме *главен редекс* на M .

Твърдение 2

За всеки терм е вярно, че или е в главна нормална форма, или има главен редекс.

Дефиниция (Главна редукция)

$$\lambda_{\vec{x}}(\lambda_y P)Q\vec{N} \xrightarrow{h} \lambda_{\vec{x}}P[y \mapsto Q]\vec{N}.$$

$$\xrightarrow{h} := (\xrightarrow{h})^{R,T}.$$

Задача

Ако $M \xrightarrow{h} M'$, то $M[x \mapsto N] \xrightarrow{h} M'[x \mapsto N]$.

Главна нормализация

Дефиниция (Главна нормализуемост)

Казваме, че термът M е *главно нормализуем*, ако $M \xrightarrow{h} N$ и N е в главна нормална форма.

Теорема (Wadsworth)

M е *главно нормализуем* $\iff M$ има главна нормална форма.

Лема 3

$\lambda_x M$ е *главно нормализуем* $\iff M$ е *главно нормализуем*.

Лема 4

Ако $M[x \mapsto N]$ е *главно нормализуем*, то M е *главно нормализуем*.

Главна нормализация

Лема 5

Ако MN е главно нормализируем, то M е главно нормализируем.

Доказателство.

Нека $M \xrightarrow{h} M_1 \xrightarrow{h} M_2 \xrightarrow{h} \dots$

I случай. Ако нито едно M_n не е абстракция, то

$MN \xrightarrow{h} M_1N \xrightarrow{h} M_2N \xrightarrow{h} \dots$

II случай. Нека $M_n \equiv (\lambda_x M')$ е първата абстракция в редицата. Тогава

$$MN \xrightarrow{h} M_nN \equiv (\lambda_x M')N \xrightarrow{h} M'[x \mapsto N],$$

откъдето следва, че M' , $\lambda_x M'$ и M са главно нормализируеми. □

Главна нормализируемост и решимост

Теорема (Wadsworth)

M е решим $\iff M$ е главно нормализируем.

Доказателство.

Без ограничение на общността можем да считаме, че M е затворен.

(\implies) Ако $M\vec{N} \stackrel{\beta}{=} I$, то $M\vec{N}$ е главно нормализируем, откъдето M е главно нормализируем.

(\impliedby) **Наблюдение:** ако $|\vec{M}| = n$, то $K^n N\vec{M} \stackrel{\beta}{=} N$.

Нека $M \stackrel{\beta}{=} \lambda_{\vec{x}} x_i \vec{M}$. Тогава $M(\overrightarrow{K^m I}) \stackrel{\beta}{=} K^m I \vec{M}' \stackrel{\beta}{=} I$. □

Следствие 2

M е нерешим $\iff M[\vec{x} \mapsto \vec{N}]\vec{P}$ няма нормална форма.

Свойства на главните нормални форми

Задача

Ако $M \not\rightarrow^h$ и $M \rightarrow^\beta N$, то $N \not\rightarrow^h$.

Задача

Всеки терм има най-много една главна нормална форма.

Дефиниция (Индуктивна дефиниция на термове в нормална форма)

Дефинираме множеството $NF \subseteq \Lambda$:

- 1 ако $x \in V$, $\vec{M} \in NF$, то $x\vec{M} \in NF$,
- 2 ако $M \in NF$, то $\lambda_x M \in NF$.

Задача

$$NF = \left\{ M \in \Lambda \mid M \not\rightarrow^\beta \right\}.$$