

Типово λ -смятане

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

16–23 април 2019 г.

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Нека да си мислим за:

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Нека да си мислим за:

- типовете като класификация на термовете

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Нека да си мислим за:

- типовете като класификация на термовете
- типовете като статични изисквания към динамично поведение

Ролята на типовите системи

Защо използваме типове?

- семантична документация
- осигуряване на коректност
- намиране на грешки
- абстракция от детайлите
- ефективност чрез коректни оптимизации

Нека да си мислим за:

- типовете като класификация на термовете
- типовете като статични изисквания към динамично поведение
- типова коректност като доказателство на теорема за отсъствие на грешки

Прости типове

Нека е дадено безкрайно изброимо множество TV от *типове променливи* $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Прости типове

Нека е дадено безкрайно изброимо множество TV от *типове променливи* $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Дефиниция (Типове)

Дефинираме множеството T от *прости типове*:

- 1 Ако $\alpha \in TV$, то $\alpha \in T$
(базов тип)
- 2 Ако $\rho, \sigma \in T$, то $(\rho \Rightarrow \sigma) \in T$
(функция с аргумент от тип ρ и резултат от тип σ)

Нотации:

Прости типове

Нека е дадено безкрайно изброимо множество TV от *типове променливи* $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Дефиниция (Типове)

Дефинираме множеството T от *прости типове*:

- 1 Ако $\alpha \in TV$, то $\alpha \in T$
(базов тип)
- 2 Ако $\rho, \sigma \in T$, то $(\rho \Rightarrow \sigma) \in T$
(функция с аргумент от тип ρ и резултат от тип σ)

Нотации:

- ще пропускаме най-външните скоби

Прости типове

Нека е дадено безкрайно изброимо множество TV от *типове променливи* $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$.

Дефиниция (Типове)

Дефинираме множеството T от *прости типове*:

- 1 Ако $\alpha \in TV$, то $\alpha \in T$
(базов тип)
- 2 Ако $\rho, \sigma \in T$, то $(\rho \Rightarrow \sigma) \in T$
(функция с аргумент от тип ρ и резултат от тип σ)

Нотации:

- ще пропускаме най-външните скоби
- ще записваме $(\rho_1 \Rightarrow (\rho_2 \Rightarrow \dots (\rho_n \Rightarrow \sigma) \dots))$ съкратено като $\rho_1 \Rightarrow \rho_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \rho_n \Rightarrow \sigma$ или $\vec{\rho} \Rightarrow \sigma$.

Стилове типове λ -смятане

Два стила типове λ -смятане:

- *Curry* стил: имплицитно типизиране

Стилове типове λ -смятане

Два стила типове λ -смятане:

- *Curry* стил: имплицитно типизиране
 - закачаме удобен за нас и подходящ тип към терموвете

Стилове типове λ -смятане

Два стила типове λ -смятане:

- *Curry* стил: имплицитно типизиране
 - закачаеме удобен за нас и подходящ тип към термовете
- *Church* стил: експлицитно типизиране

Стилове типове λ -смятане

Два стила типове λ -смятане:

- *Curry* стил: имплицитно типизиране
 - закачаме удобен за нас и подходящ тип към термовете
- *Church* стил: експлицитно типизиране
 - типовете са неразделна част от термовете

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ -смятане като асоциираме типове с някои от термовете от Λ , когато това има смисъл.

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ -смятане като асоциираме типове с някои от термовете от Λ , когато това има смисъл.

Дефиниция (Типово съждение)

Ако $M \in \Lambda$ и $\tau \in T$, то $M : \tau$ наричаме *типово съждение*.

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ -смятане като асоциираме типове с някои от терموвете от Λ , когато това има смисъл.

Дефиниция (Типово съждение)

Ако $M \in \Lambda$ и $\tau \in T$, то $M : \tau$ наричаме *типово съждение*.

Интуиция:

- Ако $M : \rho \Rightarrow \sigma$ и $N : \rho$, то $MN : \sigma$
- Ако $x : \rho$ и $M : \sigma$, то $\lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma$

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ -смятане като асоциираме типове с някои от термовете от Λ , когато това има смисъл.

Дефиниция (Типово съждение)

Ако $M \in \Lambda$ и $\tau \in T$, то $M : \tau$ наричаме *типово съждение*.

Интуиция:

- Ако $M : \rho \Rightarrow \sigma$ и $N : \rho$, то $MN : \sigma$
- Ако $x : \rho$ и $M : \sigma$, то $\lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma$

Какъв е типът на xy ?

Типови съждения

Основна идея: надграждаме безтиповото λ -смятане като асоциираме типове с някои от терموвете от Λ , когато това има смисъл.

Дефиниция (Типово съждение)

Ако $M \in \Lambda$ и $\tau \in T$, то $M : \tau$ наричаме *типово съждение*.

Интуиция:

- Ако $M : \rho \Rightarrow \sigma$ и $N : \rho$, то $MN : \sigma$
- Ако $x : \rho$ и $M : \sigma$, то $\lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma$

Какъв е типът на xy ? **Зависи!**

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Дефиниция (Типов контекст)

Нека $x_1, \dots, x_n \in V$ са различни променливи. Тогава множеството от декларации $\Gamma := \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$ наричаме *типов контекст*.

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Дефиниция (Типов контекст)

Нека $x_1, \dots, x_n \in V$ са различни променливи. Тогава множеството от декларации $\Gamma := \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$ наричаме *типов контекст*.

Дефинираме още:

- $\text{dom } \Gamma := \{x_1, \dots, x_n\}$

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Дефиниция (Типов контекст)

Нека $x_1, \dots, x_n \in V$ са различни променливи. Тогава множеството от декларации $\Gamma := \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$ наричаме *типов контекст*.

Дефинираме още:

- $\text{dom } \Gamma := \{x_1, \dots, x_n\}$
- $|\Gamma| := n$

Типови контексти

Дефиниция (Декларация)

Типово съждение от вида $x : \tau$, където $x \in V$ наричаме *декларация*

Дефиниция (Типов контекст)

Нека $x_1, \dots, x_n \in V$ са различни променливи. Тогава множеството от декларации $\Gamma := \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$ наричаме *типов контекст*.

Дефинираме още:

- $\text{dom } \Gamma := \{x_1, \dots, x_n\}$
- $|\Gamma| := n$
- $(\Gamma, x : \tau) := \Gamma \cup \{x : \tau\}$, ако $x \notin \text{dom } \Gamma$

Релация на типизиране

Дефиниция

Дефинираме индуктивно триместната релация $\Gamma \vdash M : \tau$, която четем като “ M има тип τ в контекста Γ ” с индукция по дефиницията на терма M :

- 1 Ако $x : \tau \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash x : \tau$
- 2 Ако $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$, то $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$
- 3 Ако $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma$

Релация на типизиране

Дефиниция

Дефинираме индуктивно триместната релация $\Gamma \vdash M : \tau$, която четем като “ M има тип τ в контекста Γ ” с индукция по дефиницията на терма M :

- ① Ако $x : \tau \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash x : \tau$
- ② Ако $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$, то $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$
- ③ Ако $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma$

Ако $\emptyset \vdash M : \tau$, бележим накратко $\vdash M : \tau$ и казваме, че *термът M има тип τ* , а терма M наричаме *типизируем*.

Релация на типизиране

Дефиниция

Дефинираме индуктивно триместната релация $\Gamma \vdash M : \tau$, която четем като “ M има тип τ в контекста Γ ” с индукция по дефиницията на терма M :

- ① Ако $x : \tau \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash x : \tau$
- ② Ако $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$, то $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$
- ③ Ако $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma$

Ако $\emptyset \vdash M : \tau$, бележим накратко $\vdash M : \tau$ и казваме, че *термът M има тип τ* , а терма M наричаме *типизируем*.

Ако $\nexists_{\tau \in T} \vdash M : \tau$, то казваме, че M е *нетипизируем*.

Релация на типизиране

Дефиниция

Дефинираме индуктивно триместната релация $\Gamma \vdash M : \tau$, която четем като “ M има тип τ в контекста Γ ” с индукция по дефиницията на терма M :

- ① Ако $x : \tau \in \Gamma$, то $\Gamma \vdash x : \tau$
- ② Ако $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$, то $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$
- ③ Ако $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$, то $\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma$

Ако $\emptyset \vdash M : \tau$, бележим накратко $\vdash M : \tau$ и казваме, че термът M има тип τ , а терма M наричаме типизируем.

Ако $\nexists \tau \in T \vdash M : \tau$, то казваме, че M е нетипизируем.

Задача

Да се покажат подходящи типове за термовете I, K, K^*, S, c_n .

Типови правила

Можем да разгледаме клаузите дефиниращи релацията на типизиране като правила:

- 1
$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$
- 2
$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$
- 3
$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Типови правила

Можем да разгледаме клаузите дефиниращи релацията на типизиране като правила:

- 1
$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$
- 2
$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$
- 3
$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

С всяко твърдение от вида $\Gamma \vdash M : \tau$ можем еднозначно да обвържем *дърво на построение* изградено чрез типовите правила.

Типови правила

Можем да разгледаме клаузите дефиниращи релацията на типизиране като правила:

- 1
$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$
- 2
$$\frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$
- 3
$$\frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

С всяко твърдение от вида $\Gamma \vdash M : \tau$ можем еднозначно да обвържем *дърво на построение* изградено чрез типовите правила.

В този синтактичен стил можем да изразим произволна индуктивна дефиниция, ако се интересуваме от последователните клаузи, приложени при получаване на съответното твърдение.

Лема за обръщането

Лема 1 (за обръщането)

- 1 Ако $\Gamma \vdash x : \tau$, то $x : \tau \in \Gamma$
- 2 Ако $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$, то $\exists \rho \in T$ такъв, че $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$
- 3 Ако $\Gamma \vdash \lambda_x N : \tau$, то $x \notin \text{dom } \Gamma$ и $\exists \rho, \sigma \in T$ такива, че $\rho \Rightarrow \sigma \equiv \tau$ и $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$

Лема за обръщането

Лема 1 (за обръщането)

- 1 Ако $\Gamma \vdash x : \tau$, то $x : \tau \in \Gamma$
- 2 Ако $\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma$, то $\exists \rho \in T$ такъв, че $\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $\Gamma \vdash M_2 : \rho$
- 3 Ако $\Gamma \vdash \lambda_x N : \tau$, то $x \notin \text{dom } \Gamma$ и $\exists \rho, \sigma \in T$ такива, че $\rho \Rightarrow \sigma \equiv \tau$ и $\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma$

Задача

Докажете, че $\omega \equiv \lambda_x x x$ и $\Omega \equiv \omega \omega$ не са типизируеми.

Свойства на типизирането

Твърдение 1 (монотонност)

Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Delta \vdash M : \tau$.

Свойства на типизирането

Твърдение 1 (монотонност)

Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Delta \vdash M : \tau$.

Твърдение 2 (определеност)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, то $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$.

Свойства на типизирането

Твърдение 1 (монотонност)

Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Delta \vdash M : \tau$.

Твърдение 2 (определеност)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, то $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$.

Твърдение 3 (минималност)

Нека $\Gamma \upharpoonright X := \{x : \tau \in \Gamma \mid x \in X\}$. Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \tau$.

Свойства на типизирането

Твърдение 1 (монотонност)

Ако $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Delta \vdash M : \tau$.

Твърдение 2 (определеност)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, то $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$.

Твърдение 3 (минималност)

Нека $\Gamma \upharpoonright X := \{x : \tau \in \Gamma \mid x \in X\}$. Ако $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \tau$.

Твърдение 4 (типизируемост на подтермовете)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $N \leq M$, то $\exists_{\Delta, \sigma}$ такива, че $\Delta \vdash N : \sigma$.

Типов извод

Дефиниция

Дефинираме индуктивно дървовидни структури от типови съждения с декларации по листата, които наричаме *типови изводи*:

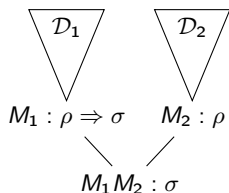
- 1 всяка декларация $x : \tau$ е типов извод

Типов извод

Дефиниция

Дефинираме индуктивно дървовидни структури от типови съждения с декларации по листата, които наричаме *типови изводи*:

- 1 всяка декларация $x : \tau$ е типов извод
- 2 ако \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 са типови изводи с корени $M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $M_2 : \rho$, то



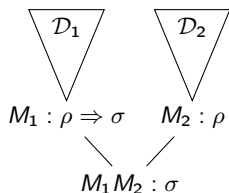
е типов извод

Типов извод

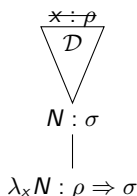
Дефиниция

Дефинираме индуктивно дървовидни структури от типови съждения с декларации по листата, които наричаме *типови изводи*:

- 1 всяка декларация $x : \tau$ е типов извод
- 2 ако \mathcal{D}_1 и \mathcal{D}_2 са типови изводи с корени $M_1 : \rho \Rightarrow \sigma$ и $M_2 : \rho$, то
- 3 ако \mathcal{D} е типов извод с корен $N : \sigma$, то



е типов извод



е типов извод

Еквивалентност на типов извод и типизируемост

Типовият извод и релацията на типизиране са два различни стила, които са еквивалентни:

Твърдение 5

$\Gamma \vdash M : \tau$ тогава и само тогава, когато съществува типов извод с корен $M : \tau$, чиито незадраскани листа са в Γ и съдържат само променливи от $FV(M)$.

Еквивалентност на типов извод и типизируемост

Типовият извод и релацията на типизиране са два различни стила, които са еквивалентни:

Твърдение 5

$\Gamma \vdash M : \tau$ тогава и само тогава, когато съществува типов извод с корен $M : \tau$, чиито незадраскани листа са в Γ и съдържат само променливи от $FV(M)$.

Стилистична разлика: интересуваме ли се от контекста на всяка стъпка или не.

Типова субституция

Дефиниция

Всяка тотална функция $\xi : TV \rightarrow T$ наричаме *типова субституция*.

Типова субституция

Дефиниция

Всяка тотална функция $\xi : TV \rightarrow T$ наричаме *типова субституция*.
Субституцията $\iota(\alpha) := \alpha$ наричаме *идентитет*.

Типова субституция

Дефиниция

Всяка тотална функция $\xi : TV \rightarrow T$ наричаме *типова субституция*.

Субституцията $\iota(\alpha) := \alpha$ наричаме *идентитет*.

Дефинираме

$$[\alpha \mapsto \tau](\beta) := \begin{cases} \tau, & \text{ако } \alpha \equiv \beta, \\ \beta, & \text{ако } \alpha \not\equiv \beta. \end{cases}$$

Типова субституция

Дефиниция

Всяка тотална функция $\xi : TV \rightarrow T$ наричаме *типова субституция*.
Субституцията $\iota(\alpha) := \alpha$ наричаме *идентитет*.

Дефинираме

$$[\alpha \mapsto \tau](\beta) := \begin{cases} \tau, & \text{ако } \alpha \equiv \beta, \\ \beta, & \text{ако } \alpha \not\equiv \beta. \end{cases}$$

Дефиниция

Нека ξ е типова субституция и $\tau \in T$. Дефинираме $\tau\xi$ — *резултата от прилагането на ξ върху τ с индукция по τ* :

- 1 $\alpha\xi := \xi(\alpha)$
- 2 $(\rho \Rightarrow \sigma)\xi := \rho\xi \Rightarrow \sigma\xi$

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Лема 2 (за субституцията)

- Ако ξ е типова субституция и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma\xi \vdash M : \tau\xi$

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Лема 2 (за субституцията)

- Ако ξ е типова субституция и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma\xi \vdash M : \tau\xi$
- Ако $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$ и $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M[x \mapsto N] : \tau$

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Лема 2 (за субституцията)

- Ако ξ е типова субституция и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma\xi \vdash M : \tau\xi$
- Ако $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$ и $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M[x \mapsto N] : \tau$

Твърдение 6 (запазване на типа при редукция)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \xrightarrow{*} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$ за $* \in \{\beta, \eta\}$

Субституция и типизиране

Дефиниция (Субституция на контексти)

Ако ξ е типова субституция, дефинираме $\Gamma\xi := \{x : \tau\xi \mid x : \tau \in \Gamma\}$.

Лема 2 (за субституцията)

- Ако ξ е типова субституция и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\Gamma\xi \vdash M : \tau\xi$
- Ако $\Gamma, x : \rho \vdash M : \tau$ и $\Gamma \vdash N : \rho$, то $\Gamma \vdash M[x \mapsto N] : \tau$

Твърдение 6 (запазване на типа при редукция)

Ако $\Gamma \vdash M : \tau$ и $M \xrightarrow{*} N$, то $\Gamma \vdash N : \tau$ за $* \in \{\beta, \eta\}$

Задача

Запазва ли се типът при експанзия? Доказателство или контрапример!

Най-общ тип

Дефиниция

Казваме, че σ е по-общ от τ или $\sigma \supseteq \tau$, ако има типова субституция ξ такава, че $\sigma\xi \equiv \tau$.

Най-общ тип

Дефиниция

Казваме, че σ е по-общ от τ или $\sigma \supseteq \tau$, ако има типова субституция ξ такава, че $\sigma\xi \equiv \tau$.

Задача

Докажете, че \supseteq е частична преднаредба, т.е. рефлексивна и транзитивна.

Най-общ тип

Дефиниция

Казваме, че σ е по-общ от τ или $\sigma \supseteq \tau$, ако има типова субституция ξ такава, че $\sigma\xi \equiv \tau$.

Задача

Докажете, че \supseteq е частична преднаредба, т.е. рефлексивна и транзитивна.

Дефиниция (най-общ тип)

Казваме, че τ е най-общ тип на терма M в контекста Γ , ако

- $\Gamma \vdash M : \tau$
- ако $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\tau \supseteq \sigma$.

Най-общ тип

Дефиниция

Казваме, че σ е по-общ от τ или $\sigma \supseteq \tau$, ако има типова субституция ξ такава, че $\sigma\xi \equiv \tau$.

Задача

Докажете, че \supseteq е частична преднаредба, т.е. рефлексивна и транзитивна.

Дефиниция (най-общ тип)

Казваме, че τ е най-общ тип на терма M в контекста Γ , ако

- $\Gamma \vdash M : \tau$
- ако $\Gamma \vdash M : \sigma$, то $\tau \supseteq \sigma$.

Задача

Покажете най-общ тип за $I, K, KI, K*, S, SK, SKK, c_0, c_1, c_2$.

Основни задачи на типовото λ -смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

- 1 Дадено: $M \in \Lambda, \tau \in T$, търсим: дали $\vdash M : \tau$
(типова коректност, *type checking*, $\vdash M : \tau$?)

Основни задачи на типовото λ -смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

- 1 Дадено: $M \in \Lambda, \tau \in T$, търсим: дали $\vdash M : \tau$
(типова коректност, *type checking*, $\vdash M : \tau$?)
- 2 Дадено: $M \in \Lambda$, търсим: най-общ $\tau \in T$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типово извеждане, *type inference*, $\vdash M : ?$)

Основни задачи на типовото λ -смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

- 1 **Дадено:** $M \in \Lambda, \tau \in T$, **търсим:** дали $\vdash M : \tau$
(типова коректност, *type checking*, $\vdash M : \tau$?)
- 2 **Дадено:** $M \in \Lambda$, **търсим:** най-общ $\tau \in T$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типovo извеждане, *type inference*, $\vdash M : ?$)
- 3 **Дадено:** $\tau \in T$, **търсим:** комбинатор $M \in \Lambda$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типова обитаемост, *type inhabitation*, $\vdash ? : \tau$)

Основни задачи на типовото λ -смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

- 1 Дадено: $M \in \Lambda, \tau \in T$, търсим: дали $\vdash M : \tau$
(типова коректност, *type checking*, $\vdash M : \tau$?)
 - 2 Дадено: $M \in \Lambda$, търсим: най-общ $\tau \in T$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типово извеждане, *type inference*, $\vdash M : ?$)
 - 3 Дадено: $\tau \in T$, търсим: комбинатор $M \in \Lambda$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типова обитаемост, *type inhabitation*, $\vdash ? : \tau$)
- типова коректност е еквивалентна на типовото извеждане

Основни задачи на типовото λ -смятане

Интересуваме се от следните основни задачи:

- 1 **Дадено:** $M \in \Lambda, \tau \in T$, **търсим:** дали $\vdash M : \tau$
(типова коректност, *type checking*, $\vdash M : \tau$?)
 - 2 **Дадено:** $M \in \Lambda$, **търсим:** най-общ $\tau \in T$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типово извеждане, *type inference*, $\vdash M : ?$)
 - 3 **Дадено:** $\tau \in T$, **търсим:** комбинатор $M \in \Lambda$ такъв, че $\vdash M : \tau$
(типова обитаемост, *type inhabitation*, $\vdash ? : \tau$)
- типовата коректност е еквивалентна на типовото извеждане
 - и трите задачи са алгоритмично решими

Типизирани λ -термове

Основна идея: типовете са вградени в термовете.

Типизирани λ -термове

Основна идея: типовете са вградени в термовете.

Дефинираме *множеството от типизирани променливи*

$$V^T := \{x^\tau \mid x \in V, \tau \in T\}.$$

Типизирани λ -термове

Основна идея: типовете са вградени в термовете.

Дефинираме *множеството от типизирани променливи*

$V^T := \{x^\tau \mid x \in V, \tau \in T\}$. Множеството $S \subseteq V^T$ наричаме

съвместимо, ако за всички $x^\sigma, y^\tau \in S$ е вярно, че ако $\sigma \neq \tau$, то $x \neq y$.

Типизирани λ -термове

Основна идея: типовете са вградени в термовете.

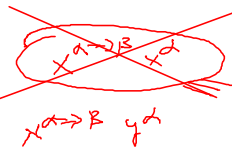
Дефинираме *множеството от типизирани променливи*

$V^T := \{x^\tau \mid x \in V, \tau \in T\}$. Множеството $S \subseteq V^T$ наричаме *съвместимо*, ако за всички $x^\sigma, y^\tau \in S$ е вярно, че ако $\sigma \neq \tau$, то $x \neq y$.

Дефиниция (типизирани λ -термове и свободните им променливи)

Дефинираме множеството от типизирани λ -термове Λ^T едновременно с функцията $FV : \Lambda^T \rightarrow V^T$:

- 1 ако $x^\tau \in V^T$, то $x^\tau \in \Lambda^T$ и $FV(x^\tau) := \{x^\tau\}$
- 2 ако $M^{\rho \Rightarrow \sigma}, N^\rho \in \Lambda$ и множеството $FV(M^{\rho \Rightarrow \sigma}) \cup FV(N^\rho)$ е съвместимо, то $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)^\sigma \in \Lambda^T$ и $FV((M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)^\sigma) := FV(M^{\rho \Rightarrow \sigma}) \cup FV(N^\rho)$
- 3 ако $x^\rho \in V^T$ и $N^\sigma \in \Lambda$, то $(\lambda_{x^\rho} N^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma} \in \Lambda^T$ и $FV((\lambda_{x^\rho} N^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma}) := FV(N^\sigma) \setminus \{x^\rho\}$.



Нотации и конвенция

Нотация:

- ще изпусваме най-външните скоби
- ще считаме апликацията за дясноасоциативна и ще изпусваме съответните скоби
- ще обединяваме последователни абстракции
- ще пропускаме типовете, където се подразбират еднозначно, например:

- $M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho}$ вместо $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma}$

- $\lambda_{X^{\alpha}, Y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} uX$ вместо $(\lambda_{X^{\alpha}} (\lambda_{Y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} (y^{\alpha \Rightarrow \alpha} X^{\alpha})^{\alpha})^{\alpha \Rightarrow \alpha})^{\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha}$

Нотации и конвенция

Нотация:

- ще изпускаме най-външните скоби
- ще считаме апликацията за дясноасоциативна и ще изпускаме съответните скоби
- ще обединяваме последователни абстракции
- ще пропускаме типовете, където се подразбират еднозначно, например:
 - $M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho}$ вместо $(M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^{\rho})^{\sigma}$
 - $\lambda_{x^{\alpha}, y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} u x$ вместо $(\lambda_{x^{\alpha}} (\lambda_{y^{\alpha \Rightarrow \alpha}} (y^{\alpha \Rightarrow \alpha} x^{\alpha})^{\alpha})^{\alpha \Rightarrow \alpha})^{\alpha \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha}$

За Λ^T можем аналогично на Λ :

- да се дефинира $BV(M)$
- да се дефинира α -еквивалентност
- да се докаже, че е коректно да въведем конвенцията за променливите на Barendregt

Субституция на типизирани λ -термове

Дефиниция (Субституция на типизирани λ -термове)

Нека $M^\tau, N^\rho \in \Lambda^T$, $x^\rho \in V^T$ и $FV(M^\tau) \cup FV(N^\rho) \setminus \{x^\rho\}$ е съвместимо. Дефинираме $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho]$:

- 1 $x^\rho[x^\rho \mapsto N^\rho] := N^\rho$ (в случая е вярно, че $\rho \equiv \tau$)
- 2 $y^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := y^\tau$ за $y^\tau \neq x^\rho$,
- 3 $(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := ((M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}[x^\rho \mapsto N^\rho])(M_2^\sigma[x^\rho \mapsto N^\rho]))^\tau$,
- 4 $(\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho] := (\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho])^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}$

Субституция на типизирани λ -термове

Дефиниция (Субституция на типизирани λ -термове)

Нека $M^\tau, N^\rho \in \Lambda^T$, $x^\rho \in V^T$ и $FV(M^\tau) \cup FV(N^\rho) \setminus \{x^\rho\}$ е съвместимо. Дефинираме $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho]$:

- 1 $x^\rho[x^\rho \mapsto N^\rho] := N^\rho$ (в случая е вярно, че $\rho \equiv \tau$)
- 2 $y^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := y^\tau$ за $y^\tau \neq x^\rho$,
- 3 $(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := ((M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}[x^\rho \mapsto N^\rho])(M_2^\sigma[x^\rho \mapsto N^\rho]))^\tau$,
- 4 $(\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho] := (\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho])^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}$

Лесно се вижда, че ако $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] \equiv P^\sigma$, то $\sigma \equiv \tau$.

Субституция на типизирани λ -термове

Дефиниция (Субституция на типизирани λ -термове)

Нека $M^\tau, N^\rho \in \Lambda^T$, $x^\rho \in V^T$ и $FV(M^\tau) \cup FV(N^\rho) \setminus \{x^\rho\}$ е съвместимо. Дефинираме $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho]$:

- 1 $x^\rho[x^\rho \mapsto N^\rho] := N^\rho$ (в случая е вярно, че $\rho \equiv \tau$)
- 2 $y^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := y^\tau$ за $y^\tau \neq x^\rho$,
- 3 $(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] := ((M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}[x^\rho \mapsto N^\rho])(M_2^\sigma[x^\rho \mapsto N^\rho]))^\tau$,
- 4 $(\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho] := (\lambda_{y^{\tau_1}} P^{\tau_2}[x^\rho \mapsto N^\rho])^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}$

Лесно се вижда, че ако $M^\tau[x^\rho \mapsto N^\rho] \equiv P^\sigma$, то $\sigma \equiv \tau$.

Дефиниция (Прилагане на типова субституция)

Нека ξ е типова субституция и $M^\tau \in \Lambda^T$, дефинираме $M^\tau \xi$:

- 1 $x^\tau \xi := x^{\tau \xi}$
- 2 $(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau \xi := ((M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} \xi)(M_2^\sigma \xi))^{\tau \xi}$
- 3 $(\lambda_{y^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2} \xi := (\lambda_{y^{\tau_1} \xi} N^{\tau_2 \xi})^{\tau_1 \xi \Rightarrow \tau_2 \xi}$

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа

$$\begin{array}{l}
 (\lambda x^P M^Q) N^R \xrightarrow{\beta} M^Q [x^P \mapsto N^R] \\
 (\lambda x^P M^Q \Rightarrow x^P)^R \xrightarrow{\eta} M^Q \Rightarrow \sigma
 \end{array}$$

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа
- дефинираме типизирани варианти на I, K, K^*, S

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа
- дефинираме типизирани варианти на I, K, K^*, S
- дефинираме нормална форма, нормализируемост, силна нормализируемост, конфлуентност

$$C_n (\tau \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma$$

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа
- дефинираме типизирани варианти на I, K, K^*, S
- дефинираме нормална форма, нормализируемост, силна нормализируемост, конфлуентност
- докажем конфлуентност на $\xrightarrow{\beta}$, $\xrightarrow{\eta}$ и $\xrightarrow{\beta\eta}$

Свойства на Λ^T

Аналогично на безтиповото λ -смятане, за Λ^T можем да:

- докажем Лема за субституцията
- дефинираме безименни термове и да докажем еквивалентност с именваните термове
- дефинираме подтермове
- дефинираме λ -затваряне, λ -съвместимост и λ -контексти
- дефинираме β и η редукция и да покажем, че те запазват типа
- дефинираме типизирани варианти на I, K, K^*, S
- дефинираме нормална форма, нормализируемост, силна нормализируемост, конfluентност
- докажем конfluентност на $\xrightarrow{\beta}$, $\xrightarrow{\eta}$ и $\xrightarrow{\beta\eta}$

Кои свойства на Λ **не можем** да пренесем директно в Λ^T ?

Изтриване на типове

Дефиниция (Изтриване на типове)

Дефинираме функция $\|M\| : \Lambda^T \rightarrow \Lambda$, която изтрива типовете:

- 1 $\|x^T\| := x$,
- 2 $\|(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^T\| := \|M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}\| \|M_2^\sigma\|$,
- 3 $\|(\lambda_{x^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}\| := \lambda_x \|N^{\tau_2}\|$.

Изтриване на типове

Дефиниция (Изтриване на типове)

Дефинираме функция $\|M\| : \Lambda^T \rightarrow \Lambda$, която изтрива типовете:

- 1 $\|x^\tau\| := x$,
- 2 $\|(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau\| := \|M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}\| \|M_2^\sigma\|$,
- 3 $\|(\lambda_{x^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}\| := \lambda_x \|N^{\tau_2}\|$.

Задача (Church \rightarrow Curry)

Ако $M^\tau \in \Lambda^T$ и $FV(M^\tau) = \{x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}\}$ да се докаже, че $\Gamma \vdash \|M^\tau\| : \tau$, ако $\Gamma := \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$

Изтриване на типове

Дефиниция (Изтриване на типове)

Дефинираме функция $\|M\| : \Lambda^T \rightarrow \Lambda$, която изтрива типовете:

- 1 $\|x^\tau\| := x$,
- 2 $\|(M_1^{\sigma \Rightarrow \tau} M_2^\sigma)^\tau\| := \|M_1^{\sigma \Rightarrow \tau}\| \|M_2^\sigma\|$,
- 3 $\|(\lambda_{x^{\tau_1}} N^{\tau_2})^{\tau_1 \Rightarrow \tau_2}\| := \lambda_x \|N^{\tau_2}\|$.

Задача (Church \rightarrow Curry)

Ако $M^\tau \in \Lambda^T$ и $FV(M^\tau) = \{x_1^{\sigma_1}, \dots, x_n^{\sigma_n}\}$ да се докаже, че $\Gamma \vdash \|M^\tau\| : \tau$, ако $\Gamma := \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$

Задача (Curry \rightarrow Church)

Ако $M \in \Lambda$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, да се намери терм $N^\tau \in \Lambda^T$ такъв, че $\|N^\tau\| \equiv M$ и $\forall_{x^\sigma \in FV(N^\tau)} x : \sigma \in \Gamma$.

Слабо типизирани термове

В практиката често се използва комбинация между стиловете на Church и Curry.

Слабо типизирани термове

В практиката често се използва комбинация между стиловете на Church и Curry.

Дефиниция (слабо типизирани термове)

Дефинираме множеството от слабо типизирани термове Λ^{WT} :

- 1 ако $x \in V$, то $x \in \Lambda^{WT}$,
- 2 ако $M, N \in \Lambda^{WT}$, то $(MN) \in \Lambda^{WT}$,
- 3 ако $x \in V$, $\tau \in T$ и $N \in \Lambda^{WT}$, то $(\lambda_{x\tau} N) \in \Lambda^{WT}$.

Уникалност на типизирането в Λ^{WT}

Разглеждаме следните правила за типов извод:

$$\textcircled{1} \frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\textcircled{2} \frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$

$$\textcircled{3} \frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_{x\rho} N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Уникалност на типизирането в Λ^{WT}

Разглеждаме следните правила за типов извод:

$$\textcircled{1} \frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\textcircled{2} \frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$

$$\textcircled{3} \frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_{x\rho} N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Задача

Ако $M \in \Lambda^{WT}$ и $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\sigma \equiv \tau$.

Уникалност на типизирането в Λ^{WT}

Разглеждаме следните правила за типов извод:

$$\textcircled{1} \frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau}$$

$$\textcircled{2} \frac{\Gamma \vdash M_1 : \rho \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash M_2 : \rho}{\Gamma \vdash M_1 M_2 : \sigma}$$

$$\textcircled{3} \frac{\Gamma, x : \rho \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_{x\rho} N : \rho \Rightarrow \sigma}$$

Задача

Ако $M \in \Lambda^{WT}$ и $\Gamma \vdash M : \sigma$ и $\Gamma \vdash M : \tau$, то $\sigma \equiv \tau$.

Задача

Да се формулира и докаже еквивалентността между Λ^{WT} и Λ^T .