Примерни решения на контролното по ДАА на КН2 & Инф на 20.04.2019 г.

Зад. 1 Разгледайте следния алгоритъм.

AlgX($A[1, 2, \ldots, n]$: int, където $n \in \mathbb{N}^+$)
1 $x \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$
2 $y \leftarrow \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
3 **if** n mod $2 \equiv 1$
4 $\quad y \leftarrow y + 1$
5 **while** $x \leq n$ **and** $y \geq 1$ **do**
6 $\quad$ swap($A[x], A[y]$)
7 $\quad x \leftarrow x + 1$
8 $\quad y \leftarrow y - 1$

Обяснете *прецизно* какво прави AlgX. За тази цел, нека A' означава масива A в началото на работата на алгоритъма и A'' означава масива A в края на работата на алгоритъма. Напишете израз от предикатната логика, използващ само квантори, множества, релацията равенство и масивите A' и A'', подходящо индексирани, който израз описва ефекта от работата на AlgX.

Докажете коректността на алгоритъма формално. Използвайте израза, който написахте току-що.

Решение: Алгоритъмът обръща масива. Това обаче е разговорно казано. Прецизно казано:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} : A''[i] = A'[n + 1 - i]$$

Навсякъде в доказателството $A[1, \ldots, n]$ означава текущия масив. Следното твърдение е инварианта на цикъла:

При всяко достигане на ред 5,

$$\forall i \in \{y + 1, \ldots, x - 1\} : A[i] = A'[n + 1 - i]$$

Доказателство: Булевото условие на ред 5 е конюнкция от две съждения. Цикълът престава да се изпълнява ако, и само ако, поне едното от тях е лъжа. За да е пълно доказателството, добре е да се покаже формално, че при последното достигане на ред 5, *и двете* съждения са лъжа. Ако докажем това, ще имаме основание да твърдим, че $x = n + 1$ и $y = 0$ в този момент. Поради това ще засилим твърдението. Ще докажем следното.

При достигане номер k на ред 5,

❶ $\forall i \in \{y + 1, \ldots, x - 1\} : A[i] = A'[n + 1 - i]$

❷ $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k - 1)$

❸ $y = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k - 1), & \text{ако } n \text{ е четно} \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k - 1), & \text{ако } n \text{ е нечетно} \end{cases}$

База: Базовият случай е първото достигане на ред 5. Тогава $k = 1$.

- Ако $n = 2m + 1$ за някое $m \in \mathbb{N}$, то $x = m + 1$ и $y = m + 1$ при първото достигане на ред 5. Тогава $A[y + 1, \ldots, x - 1]$ всъщност е $A[m + 2, \ldots, m]$. Но $A[m + 2, \ldots, m]$ е празен и ❶ е истина по празния начин (vacuously). Освен това $k - 1$ е 0 и $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, така че

  ❷ $x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k - 1)$

  ❸ $y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k - 1)$

  са очевидно изпълнени.

- Ако $n = 2k$ за някое $m \in \mathbb{N}$, то $x = m + 1$ и $y = m$ при първото достигане на ред 5. Но масивът $A[m+1, \ldots, m]$ е празен и ❶ е истина по празния начин (vacuously). Освен това $k-1$ е 0 и $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, така че

  ❷ $x = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1)$

  ❸ $y = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - (k-1)$

  са очевидно изпълнени.

Поддръжка: Да допуснем, че твърдението е вярно за някое достигане номер k на ред 5, което не е последното.

- Нека n е нечетно. Първо ще докажем ❶. От предположението имаме (при нечетно n)

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) \tag{1}$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1) \tag{2}$$

След изпълнението на ред 6 е вярно, че

$$A[y] = A'[x] \tag{3}$$
$$A[x] = A'[y] \tag{4}$$

Но

$$\begin{aligned} x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) &= \underbrace{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}_{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (k-1) = \\ n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (k-1) &= n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1)\right) = n + 1 - y \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1) &= \underbrace{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1}_{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) = \\ n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) &= n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1)\right) = n + 1 - x \end{aligned} \tag{6}$$

Тогава

$$A[y] = A'[n+1-y] \tag{7}$$
$$A[x] = A'[n+1-x] \tag{8}$$

От предположението знаем, че

$$\forall i \in \{y+1, \ldots, x-1\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Имайки предвид и (15) и (16), получаваме

$$\forall i \in \{y, \ldots, x\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Изпълняват се присвояванията на редове 7 и 8. Спрямо новите стойности на x и y е вярно, че

$$\forall i \in \{y+1, \ldots, x-1\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Доказахме, че ❶ се запазва.

Ще докажем, че ❷ и ❸ се запазват. Пак разглеждаме (1) и (2). След присвояванията на редове 7 и 8 е вярно, че

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + k$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - k$$

При следващото достигане на ред 5 в алгоритъма, спрямо новата стойност на k, отново е вярно, че

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1)$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1)$$

- Нека n е четно. Първо ще докажем ❶. От предположението имаме (при четно n)

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) \tag{9}$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) \tag{10}$$

След изпълнението на ред 6 е вярно, че

$$A[y] = A'[x] \tag{11}$$
$$A[x] = A'[y] \tag{12}$$

Но

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) = \underbrace{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}_{n} + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (k-1) =$$
$$n + 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (k-1) = n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1)\right) = n + 1 - y \tag{13}$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) = \underbrace{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}_{n} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) =$$
$$n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) = n + 1 - \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1)\right) = n + 1 - x \tag{14}$$

Тогава

$$A[y] = A'[n+1-y] \tag{15}$$
$$A[x] = A'[n+1-x] \tag{16}$$

От предположението знаем, че

$$\forall i \in \{y+1, \dots, x-1\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Имайки предвид и (15) и (16), получаваме

$$\forall i \in \{y, \dots, x\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Изпълняват се присвояванията на редове 7 и 8. Спрямо новите стойности на x и y е вярно, че

$$\forall i \in \{y+1, \dots, x-1\} : A[i] = A'[n+1-i]$$

Доказахме, че ❶ се запазва.

Ще докажем, че ❷ и ❸ се запазват. Пак разглеждаме (9) и (10). След присвояванията на редове 7 и 8 е вярно, че

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + k$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - k$$

При следващото достигане на ред 5 в алгоритъма, спрямо новата стойност на k, отново е вярно, че

$$x = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1)$$
$$y = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1)$$

Терминация: Разглеждаме последното достигане на ред 5. Поне едното от

$$x = n + 1$$
$$y = 0$$

е вярно само заради това, че булевото условия на ред 5 е лъжа и променливите x и y са цели и се менят с единица на всяка итерация. Ще докажем, че и двете са верни така: всяко от тях влече другото.

- Нека n е нечетно. От инвариантата знаем, че

$$\begin{aligned}
x &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) \\
y &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1)
\end{aligned}$$

Нека $x = n+1$. Тогава

$$\begin{aligned}
n + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) &\leftrightarrow \\
2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) &\leftrightarrow \\
\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 - (k-1) = 0 &\leftrightarrow \\
y = 0 &
\end{aligned}$$

Показахме, че $x = n+1 \leftrightarrow y = 0$. Тогава и $x = n+1$, и $y = 0$. Заместваме в ❶ и получаваме

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : A''[i] = A'[n+1-i]$$

- Нека n е четно. От инвариантата знаем, че

$$\begin{aligned}
x &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) \\
y &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1)
\end{aligned}$$

Нека $x = n+1$. Тогава

$$\begin{aligned}
n + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) &\leftrightarrow \\
2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 + (k-1) &\leftrightarrow \\
\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - (k-1) = 0 &\leftrightarrow \\
y = 0 &
\end{aligned}$$

Показахме, че $x = n+1 \leftrightarrow y = 0$. Тогава и $x = n+1$, и $y = 0$. Заместваме в ❶ и получаваме

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} : A''[i] = A'[n+1-i]$$

Зад. 2 Подредете по асимптотично нарастване следните шест функции.

$$f_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \qquad f_2(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{n} \qquad f_3(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n}{k}$$

$$f_4(n) = \sum_{k=1}^{n!} \frac{1}{2^k} \qquad f_5(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad f_6(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Напишете в явен вид самата наредба.

Решение Да разгледаме $f_2(n)$.

$$f_2(n) = \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \cdots \binom{n-1}{n} + \binom{n}{n} = 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 = 1$$

Тогава $f_2(n) = \Theta(1)$. От курса по математически анализ знаем, че $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ е ограничена отгоре от константа, откъдето заключаваме, че $f_4(n) = \Theta(1)$. От курса по математически анализ знаем, че $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ е ограничена отгоре от константа, откъдето заключаваме, че $f_5(n) = \Theta(1)$. И така, $f_2(n) \asymp f_4(n) \asymp f_5(n) \asymp 1$.

Да разгледаме $f_6(n)$. Тя е n-тата парциална сума на хармоничния ред. Хармоничният ред е разходящ и неговите парциални суми не са ограничени отгоре от никоя константа. Известно е обаче, и това може да се ползва наготово, че n-тата парциална сума на хармоничния ред е асимптотично еквивалентна на $\lg n$. Това може да се изведе лесно така:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} < \int_1^n \frac{1}{x} dx < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \rightarrow \\
&H_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x} dx < H_{n-1} \rightarrow \\
&H_n - 1 < \ln n < H_{n-1} \rightarrow \\
&\exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 > 0\ \forall n \geq n_0 : c_1 \cdot H_n \leq \ln n \leq c_2 \cdot H_n \rightarrow \\
&\ln n \in \Theta(H_n) \rightarrow \\
&H_n \in \Theta(\lg n)
\end{aligned}
$$

Очевидно $f_5(n) \prec f_6(n)$.

От курса по Дискретни структури знаем, че $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Тогава $f_1(n) = 2^n - 1$, така че $f_1(n) \asymp 2^n$. Следователно, $f_6(n) \prec f_1(n)$.

И накрая ще разгледаме $f_3(n) = \binom{2n}{1} + \binom{2n}{n} + \cdots + \binom{2n}{n}$. Очевидно $\binom{2n}{n} < f_3(n)$, така че, ако покажем, че $f_1(n) \prec \binom{2n}{n}$, ще сме показали и $f_1(n) \prec f_3(n)$. Да сравним $f_1(n) = 2^n - 1$ с $\binom{2n}{n}$. Фактът, че

$$
\binom{n}{\frac{n}{2}} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n
$$

може да се ползва наготово, но може и да се изведе лесно:

$$
\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2} \asymp \frac{\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{e^n}}{\left(\sqrt{2\pi \frac{n}{2}}\,\frac{\frac{n}{2}^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n}{2}}}\right)^2} = \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\,\frac{n^n}{e^n} \times \frac{e^n}{\pi n \frac{n^n}{2^n}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 2^n \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^n
$$

Тогава

$$
\binom{2n}{n} \asymp \frac{1}{\sqrt{2n}} 2^{2n} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 4^n
$$

Очевидно е, че $2^n - 1 \prec \frac{1}{\sqrt{n}} 4^n$. Тогава $f_1(n) \prec f_3(n)$.

Окончателната наредба е

$$
f_2(n) \asymp f_4(n) \asymp f_5(n) \prec f_6(n) \prec f_1(n) \prec f_3(n)
$$

Зад. 3 Решете рекурентното уравнение

$$
T(n) = 2T(n-1) + T(\log_2 n) + n
$$

Решение: Това рекурентно уравнение не може да се реши нито с МТ, нито с метода с характеристично уравнение. Ще го решим по индукция, тоест, ще отгатнем решение и после ще докажем, че именно то е решението.

Да разгледаме двете появи на функцията вдясно. В едната намаляването е изваждане на единица, а в другата, логаритмуване. Ако нямаше събираемото $T(\log_2 n)$, решението щеше да е $\Theta(2^n)$. Отгатването се състои в това да съобразим, че $T(\log_2 n)$ има пренебрежимо малък принос към сумата вдясно, защото логаритъмът намалява много по-бързо от изваждането. С други думи, асимптотиката не се променя от добавянето на събираемо $T(\log_2 n)$ в дясната страна на $T(n) = 2T(n-1) + n$.

И така, отгатваме

$$
T(n) \asymp 2^n
$$

Сега ще го докажем по индукция по n. Ще докажем поотделно, че $T(n) \preceq 2^n$ и $T(n) \succeq 2^n$.

I Доказваме, че $T(n) \preceq 2^n$. По дефиниция, това означава, че има положителна константа c, такава че за всички достатъчно големи стойности на аргумента е в сила

$$T(n) \leq c2^n \tag{17}$$

Използваме силна индукция: допускаме, че съществува c, за което

$$\begin{aligned}
T(n-1) &\leq c2^{n-1} \\
T(n-2) &\leq c2^{n-2} \\
&\dots \\
T(\log_2 n) &\leq c2^{\log_2 n} \\
&\dots \\
T(1) &\leq c2^1
\end{aligned}$$

От всички тези предположения ще използваме само две:

$$\begin{aligned}
T(n-1) &\leq c2^{n-1} \\
T(\log_2 n) &\leq c2^{\log_2 n}
\end{aligned}$$

От тях и дефиницията на $T(n)$, а именно $T(n) = 2T(n-1) + T(\log_2 n) + n$, веднага следва, че

$$T(n) \leq 2c2^{n-1} + c2^{\log_2 n} + n = c2^n + c2^{\log_2 n} + n$$

Ако успеем да покажем, че дясната страна не надхвърля $c2^n$, тоест

$$c2^n + c2^{\log_2 n} + n \leq c2^n$$

сме готови. За съжаление, това не е вярно, понеже $c2^{\log_2 n} + n > 0$. Не успяхме да докажем (17).

Ща засилим индукционното предположение. Сега вече допускаме, че

$$T(n) \leq c2^n - d\alpha^n \tag{18}$$

за някакви положителни c, d, за някакво $\alpha \in (1, 2)$ и всички достатъчно големи стойности на n. Допускаме, че

$$\begin{aligned}
T(n-1) &\leq c2^{n-1} - d\alpha^{n-1} \\
T(\log_2 n) &\leq c2^{\log_2 n} - d\alpha^{\log_2 n} = cn - d\alpha^{\log_2 n}
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
T(n) &\leq 2(c2^{n-1} - d\alpha^{n-1}) + (cn - d\alpha^{\log_2 n}) + n \\
&= c2^n - 2d\alpha^{n-1} + cn - d\alpha^{\log_2 n} + n
\end{aligned}$$

За да довършим доказателството, трябва да докажем, че

$$\begin{aligned}
&c2^n - 2d\alpha^{n-1} + cn - d\alpha^{\log_2 n} + n \leq c2^n - d\alpha^n \quad \leftrightarrow \\
&-2d\alpha^{n-1} + cn - d\alpha^{\log_2 n} + n \leq -d\alpha^n \quad \leftrightarrow \\
&\underbrace{d\alpha^n - 2d\alpha^{n-1}}_{\text{експоненциална функция}} + \underbrace{cn - d\alpha^{\log_2 n} + n}_{\text{линейна функция}} \leq 0
\end{aligned}$$

За да докажем желаното неравенство е достатъчно изследваме експоненциалната функция; можем спокойно да игнорираме линейната, понеже, в абсолютни стойности, експоненциалната я доминира асимптотично, ерго, в истински стойности, ако експоненциалната е отрицателна за всички достатъчно големи n, имаме доказателство. Разглеждаме

$$d\alpha^n - 2d\alpha^{n-1} < 0 \quad \leftrightarrow \quad \alpha < 2$$

И така, всеки избор на $\alpha \in (1, 2)$, с всеки избор на положителни c и d ни дава (18).

II Доказваме, че $T(n) \succeq 2^n$. По дефиниция, това означава, че има положителна константа c, такава че за всички достатъчно големи стойности на аргумента е в сила

$$T(n) \geq c2^n \tag{19}$$

Използваме силна индукция: допускаме, че съществува c, за което

$$\begin{aligned} T(n-1) &\geq c2^{n-1} \\ T(n-2) &\geq c2^{n-2} \\ &\dots \\ T(\log_2 n) &\geq c2^{\log_2 n} \\ &\dots \\ T(1) &\geq c2^1 \end{aligned}$$

От всички тези предположения ще използваме само две:

$$\begin{aligned} T(n-1) &\geq c2^{n-1} \\ T(\log_2 n) &\geq c2^{\log_2 n} \end{aligned}$$

От тях и дефиницията на $T(n)$, а именно $T(n) = 2T(n-1) + T(\log_2 n) + n$, веднага следва, че

$$T(n) \geq 2c2^{n-1} + c2^{\log_2 n} + n = c2^n + c2^{\log_2 n} + n$$

Ако успеем да покажем, че дясната страна е поне $c2^n$, тоест

$$c2^n + c2^{\log_2 n} + n \geq c2^n$$

сме готови. Но това очевидно е вярно. Желаният резултат (19) следва.

Зад. 4 Представете си нещо, което има цена, която се мени от ден на ден. Да кажем, акция на компания. Цената е неотрицателна винаги. Разглеждаме n последователни дни $d_1, \dots, d_n$. В ден d_i акцията има цена c_i, за $i \in \{1, \dots, n\}$. Предложете ефикасен алгоритъм, който по даден вектор $(c_1, \dots, c_n)$ изчислява максималната печалба, която можем да реализираме. Ние можем да реализираме печалба по само един начин: да купим акцията някой ден и да я продадем в някой от *следващите* дни. Не може да я продадем в същия ден (а това би било и безсмислено, понеже тогава бихме били с печалба нула). Подчертаваме, че акцията или не се купува изобщо (което означава, че не се и продава, понеже не можем да продадем нещо, което нямаме), при което печалбата е нула, или се купува *само веднъж* и след това се продава (очевидно, само веднъж).

Докажете коректността на предложения от Вас алгоритъм и изследвайте сложността му по време.

Решения, които работят с брутална сила, ще бъдат оценявани с 0 точки. Решения, работещи в $\Theta(n \lg n)$, ще бъдат оценявани с 20 точки. Решения, работещи в $\Theta(n)$, ще бъдат оценявани с 25 точки.

Решение: Решението с брутална сила е

```
ТакаНеСеПрави(⟨c1, ..., cn⟩)
s ← 0
for i ← 1 to n − 1
    for j ← i + 1 to n
        if cj − ci > s
            s ← cj − ci
return s
```

По-добра идея е да направим масив $B[1, \dots, n-1]$ така:

```
for i ← 1 to n − 1
    B[i] ← c(i+1) − ci
```

Елементите на B може да са и отрицателни. Това, което търсим, е подмасив, сумата от елементите на който е максимална; и дори не самия подмасив, а само сумата. Сведохме дадената задача до добре известната задача Maximum-Sum-Subarray. Решение за нея, изградено по схемата Разделяй-и-Владей, се съдържа, примерно, в учебника на Cormen, Leiserson, Rivest, Stein на страница 68 в третото издание. Този алгоритъм има сложност по време $\Theta(n \lg n)$.

За Maximum-Sum-Subarray има и линеен алгоритъм, който се нарича алгоритъм на Kadane. Ето кода:

```
Kadane(A[1,...,n]: int)
1   m ← 0
2   ℓ ← 0
3   for i ← 1 to n
4       ℓ ← ℓ + A[i]
5       if ℓ < 0
6           ℓ ← 0
7       if ℓ > m
8           m ← ℓ
9   return m
```

Ще докажем коректността на алгоритъма с инварианта на цикъла. Дефинираме, че "подмасив, завършващ в $A[j]$" е всеки непразен подмасив с най-десен елемент $A[j]$ или празен подмасив.

> При всяко достигане на ред 3, променливата m съдържа максималната сума на подмасив в подмасива $A[1,\dots,i-1]$, а ℓ съдържа максималната сума на подмасив в $A[1,\dots,i-1]$, завършващ в $A[i-1]$.

Забележете, че тук се казва имплицитно, че m и ℓ са неотрицателни, тъй като сумата от елементите на празен масив е нула.

Да разгледаме първото достигане на ред 3. Тогава $i = 1$, така че подмасивът $A[1,\dots,i-1]$ е празен и максималната сума на подмасив в него е нула. Също така и максималната сума на подмасив, завършващ в $A[0]$, също е нула. Но на редове 1 и 2 на m и ℓ са присвоени точно нули. В базовия случай твърдението е истина. ✓

Да допуснем, че за някое достигане на ред 3, което не е последното, твърдението е истина. На ред 4 събираме ℓ с $A[i]$. Следните две възможности са изчерпателни и взаимно изключващи се.

1. Всеки непразен подмасив, чийто най-десен елемент е $A[i]$, има отрицателна сума от елементите (това влече, че $A[i] < 0$). В този случай максималната сума на елементите на подмасив, завършващ в $A[i]$, е нула, понеже това може да е само празният подмасив.

   Забелязваме, че $\ell + A[i] < 0$ – обратното би означавало, че *има* непразен подмасив, завършващ в $A[i]$, чиято сума е неотрицателна. Следователно, булевото условие на ред 5 е истина и ред 6 се изпълнява. Вече ℓ има стойност нула, което е точно максималната сума от елементите на подмасив, завършващ в $A[i]$.

2. Съществува непразен подмасив с най-десен елемент $A[i]$, който има неотрицателна сума от елементите. Забелязваме, че в този случай $\ell + A[i] \geq 0$ – това следва веднага от индуктивното предположение за ℓ. Следователно, булевото условие на ред 5 е лъжа и ред 6 не се изпълнява. ℓ има стойност, равна на максималната сума от елементите на подмасив, завършващ в $A[i]$.

Сега разглеждаме ред 7. Отново има две възможности.

1. Всеки подмасив на $A[1,\dots,i]$ с максимална сума на елементите съдържа $A[i]$. От досега направените разсъждения следва, че тази сума се съдържа в ℓ. Освен това, $\ell > m$ – обратното би значело, че подмасив на $A[1,\dots,i]$ с максимална сума е и подмасив на $A[1,\dots,i-1]$, ерго не съдържа $A[i]$. Тогава булевото условие на ред 8 е истина и ред 8 се изпълнява. Вече m съдържа максималната сума на елементите на подмасив на $A[1,\dots,i]$.

2. Съществува подмасив на $A[1,\ldots,i]$ с максимална сума на елементите, който не съдържа $A[i]$. Тогава m съдържа максималната сума на елементите на подмасив на $A[1,\ldots,i]$ още в началото на текущата итерация. Ред 8 не се изпълнява. m продължава да съдържа максималната сума на елементите на подмасив на $A[1,\ldots,i]$.

Следователно, при следващото достигане на ред 3, спрямо новата (инкрементирана с единица) стойност на i, m съдържа максималната сума на подмасив в подмасива $A[1,\ldots,i-1]$, а ℓ съдържа максималната сума на подмасив в $A[1,\ldots,i-1]$, завършващ в $A[i-1]$.

При последното достигане на ред 3 е вярно, че m съдържа максималната сума на подмасив в подмасива $A[1,\ldots,n]$. Следователно, чрез изпълнението на ред 9, алгоритъмът връща максималната сума на подмасив в $A[1,\ldots,n]$.

Очевидно сложността по време е линейна – цикълът се изпълнява $\Theta(n)$ пъти, като всяко изпълнение става в $\Theta(1)$ време. А работата извън цикъла също е $\Theta(1)$.

Зад. 5 Нека p и q са цели положителни числа. Нека $n = pq$. Даден е масив $A[1,\ldots,n]$ от цели числа, за който следните две условия са изпълнени:

❶ $\forall i \in \{1,\ldots,n\}\, \forall j \in \{1,\ldots,n\} \left(i \neq j \rightarrow A[i] \neq A[j]\right)$

❷ $\forall i \in \{1,\ldots,q-1\}\, \forall j \in \{i+1,\ldots,q\}$
$$\forall x \in \{A[(i-1)p+1],\ldots,A[ip]\}\, \forall y \in \{A[(j-1)p+1],\ldots,A[jp]\} \left(x < y\right)$$

Докажете, че има долна граница $\Omega(n \lg p)$ за сортирането на масива A, ако сортирането е базирано на директни сравнения.

Решение: Условие ❶ казва, че елементите на A са два по два различни. Условие ❷ казва, че $A[1,\ldots,n]$ се състои от q на брой подмасива, всеки с размер p, един след друг, такива че за всеки един от тях, всеки негов елемент е по-малък от всеки елемент от всеки следващ подмасив. Тогава A е, донякъде, сортиран поначало. Не е истински сортиран, защото във всеки от тези q на брой подмасиви числата може да са в произволен ред. Очевидно не всички $n!$ пермутации на числата (n на брой) са възможни. За всеки от подмасивите има точно $p!$ възможни пермутации, защото числата в него p на брой. Тъй като общо подмасивите са q, има точно $(p!)^q$ различни възможности за входа.

Разглеждаме дървото за вземане на решения. То трябва да има поне $(p!)^q$ листа, откъдето височината му е поне $\log_2\left((p!)^q\right) \asymp q \lg p! \asymp qp \lg p$. Но $qp = n$, откъдето височината е поне $n \lg p$, в асимптотичния смисъл. Това дава и долна граница за задачата.

Зад. 6 Докажете коректността на алгоритъма за намиране на силно свързани компоненти на ориентиран граф, изучаван на лекции. Въпреки че този алгоритъм е изучаван на лекции, тук не можете да го ползвате наготово – това би обезсмислило задачата. Трябва да го напишете и да докажете, че е коректен.