Силна нормализация

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

23 април – 7 май 2019 г.

Дефиниции и цел

Дефиниция (нормализируемост)

Казваме, че един терм M е *нормализируем*, ако *съществува* крайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \overset{\beta}{\not\to}$.

Дефиниции и цел

Дефиниция (нормализируемост)

Казваме, че един терм M е *нормализируем*, ако *съществува* крайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \stackrel{\beta}{\not\to}$.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако *не съществува* безкрайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \ldots$.

Дефиниции и цел

Дефиниция (нормализируемост)

Казваме, че един терм M е *нормализируем*, ако *съществува* крайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \overset{\beta}{\not\to}$.

Дефиниция (силна нормализируемост)

Казваме, че термът M е *силно нормализируем*, ако *не съществува* безкрайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} M_2 \xrightarrow{\beta} \ldots \xrightarrow{\beta} M_n \xrightarrow{\beta} \ldots$.

Цел:

Теорема

Всички типизирани термове от Λ^T са силно нормализируеми.

SN

Дефиниция (SN)

Дефинираме множеството SN $\subseteq \Lambda^T$ с индукция с единствена клауза:

- Ако $\forall_N \big((M \stackrel{\beta}{\to} N) \to (N \in \mathrm{SN})\big)$, то $M \in \mathrm{SN}$.

SN

Дефиниция (SN)

Дефинираме множеството SN $\subseteq \Lambda^T$ с индукция с единствена клауза:

- Ако $\forall_N \big((M \xrightarrow{\beta} N) \to (N \in \mathrm{SN})\big)$, то $M \in \mathrm{SN}$.

Твърдение 1

SN *е точно множеството на всички силно нормализируеми термове.*

SN

Дефиниция (SN)

Дефинираме множеството $\mathrm{SN} \subseteq \Lambda^T$ с индукция с единствена клауза:

- Ако $\forall_N \big((M \xrightarrow{\beta} N) \rightarrow (N \in \mathrm{SN})\big)$, то $M \in \mathrm{SN}$.

Твърдение 1

SN *е точно множеството на всички силно нормализируеми термове.*

Доказателство.

$(\rightarrow)$ Индукция по $M \in \mathrm{SN}$ и нека съществува безкрайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots$. По ИП за M_1 имаме противоречие.

SN

Дефиниция (SN)

Дефинираме множеството SN $\subseteq \Lambda^T$ с индукция с единствена клауза:

- Ако $\forall_N\big((M \xrightarrow{\beta} N) \to (N \in \mathrm{SN})\big)$, то $M \in \mathrm{SN}$.

Твърдение 1

SN *е точно множеството на всички силно нормализируеми термове.*

Доказателство.

($\to$) Индукция по $M \in \mathrm{SN}$ и нека съществува безкрайна редица $M \equiv M_0 \xrightarrow{\beta} M_1 \xrightarrow{\beta} \ldots$. По ИП за M_1 имаме противоречие.
($\leftarrow$) От аксиома за зависимия избор (Axiom of Dependent Choice):

$$\forall_{M \notin \mathrm{SN}} \exists_{N \notin \mathrm{SN}} \big(M \xrightarrow{\beta} N\big) \to \exists_F \forall_{n \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{SN} \not\ni F(n) \xrightarrow{\beta} F(n+1)\big).$$

□

Свойства на SN

Твърдение 2

Ако $M \not\xrightarrow{\beta}$, *то* $M \in \mathrm{SN}$.

Свойства на SN

Твърдение 2

Ако $M \not\xrightarrow{\beta}$, *то* $M \in \mathsf{SN}$.

Доказателство.

Очевидно от дефиницията. $\square$

Свойства на SN

Твърдение 2

Ако $M \not\xrightarrow{\beta}$, *то* $M \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Очевидно от дефиницията. $\square$

Твърдение 3

Ако $M \in \mathrm{SN}$ *и* $M \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, *то* $N \in \mathrm{SN}$.

Свойства на SN

Твърдение 2

Ако $M \stackrel{\beta}{\not\to}$, *то* $M \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Очевидно от дефиницията. $\square$

Твърдение 3

Ако $M \in \mathrm{SN}$ *и* $M \stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow} N$, *то* $N \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Индукция по $\stackrel{\beta}{\twoheadrightarrow}$ и прилагане на дефиницията. $\square$

Свойства на SN (2)

Твърдение 4

$\forall_{M \in \Lambda^T, x \in V^T}(Mx \in \mathrm{SN} \to M \in \mathrm{SN}).$

Свойства на SN (2)

Твърдение 4

$\forall_{M \in \Lambda^T, x \in V^T}(Mx \in \mathsf{SN} \to M \in \mathsf{SN}).$

Доказателство.

Индукция по $Mx \in \mathsf{SN}$. $\square$

Свойства на SN (2)

Твърдение 4

$\forall_{M \in \Lambda^T, x \in V^T}(Mx \in \mathrm{SN} \to M \in \mathrm{SN})$.

Доказателство.

Индукция по $Mx \in \mathrm{SN}$. $\square$

Твърдение 5

Нека $x \in V^T$, $\vec{M} \in \mathrm{SN}$, *тогава* $x\vec{M} \in \mathrm{SN}$.

Свойства на SN (2)

Твърдение 4

$\forall_{M \in \Lambda^T, x \in V^T}(Mx \in \mathrm{SN} \to M \in \mathrm{SN})$.

Доказателство.

Индукция по $Mx \in \mathrm{SN}$. □

Твърдение 5

Нека $x \in V^T$, $\vec{M} \in \mathrm{SN}$, *тогава* $x\vec{M} \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Едновременна индукция по $\vec{M} \in \mathrm{SN}$. □

Свойства на SN (3)

Твърдение 6

Ако $M, N, \vec{P} \in \mathrm{SN}$ *и* $M[x \mapsto N]\vec{P} \in \mathrm{SN}$, *то* $(\lambda_x M)N\vec{P} \in \mathrm{SN}$.

Свойства на SN (3)

Твърдение 6

Ако $M, N, \vec{P} \in \mathrm{SN}$ *и* $M[x \mapsto N]\vec{P} \in \mathrm{SN}$, *то* $(\lambda_x M)N\vec{P} \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Едновременна индукция по $M, N, \vec{P}$. Разглеждаме случаи по $(\lambda_x M)N\vec{P} \xrightarrow{\beta} Q$ и използваме индукционното предположение, съгласуваност на $\xrightarrow{\beta}$ със субституцията и Твърдение 3. $\square$

Свойства на SN (3)

Твърдение 6

Ако $M, N, \vec{P} \in \mathrm{SN}$ *и* $M[x \mapsto N]\vec{P} \in \mathrm{SN}$, *то* $(\lambda_x M)N\vec{P} \in \mathrm{SN}$.

Доказателство.

Едновременна индукция по $M, N, \vec{P}$. Разглеждаме случаи по $(\lambda_x M)N\vec{P} \xrightarrow{\beta} Q$ и използваме индукционното предположение, съгласуваност на $\xrightarrow{\beta}$ със субституцията и Твърдение 3. □

Дефиниция

$\mathrm{SN}^\tau := \{M^\tau \in \mathrm{SN}\}$.

Силно изчислими термове

Дефиниция (силно изчислими термове)

Дефинираме SC^τ (“силно изчислим в типа τ”) с индукция по τ:

- $\mathsf{SC}^\alpha := \mathsf{SN}^\alpha$,
- $\mathsf{SC}^{\rho\Rightarrow\sigma} := \{M^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \forall_{N^\rho}(N^\rho \in \mathsf{SC}^\rho \to (MN)^\sigma \in \mathsf{SC}^\sigma)\}$.

Силно изчислими термове

Дефиниция (силно изчислими термове)

Дефинираме SC^τ („силно изчислим в типа τ") с индукция по τ:

- $\mathsf{SC}^\alpha := \mathsf{SN}^\alpha$,
- $\mathsf{SC}^{\rho\Rightarrow\sigma} := \{M^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \forall_{N^\rho}(N^\rho \in \mathsf{SC}^\rho \to (MN)^\sigma \in \mathsf{SC}^\sigma)\}$.

$$\mathsf{SC} := \bigcup_{\tau\in T} \mathsf{SC}^\tau.$$

Силно изчислими термове

Дефиниция (силно изчислими термове)

Дефинираме SC^τ (“силно изчислим в типа τ”) с индукция по τ:

- $\mathsf{SC}^\alpha := \mathsf{SN}^\alpha$,
- $\mathsf{SC}^{\rho\Rightarrow\sigma} := \{M^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \forall_{N^\rho}(N^\rho \in \mathsf{SC}^\rho \to (MN)^\sigma \in \mathsf{SC}^\sigma)\}$.

$$\mathsf{SC} := \bigcup_{\tau \in T} \mathsf{SC}^\tau.$$

Цел: $\mathsf{SN} \subseteq \Lambda^T \subseteq \mathsf{SC} \subseteq \mathsf{SN}$.

Силно изчислими термове

Дефиниция (силно изчислими термове)

Дефинираме SC^τ (“силно изчислим в типа τ”) с индукция по τ:

- $\mathsf{SC}^\alpha := \mathsf{SN}^\alpha$,
- $\mathsf{SC}^{\rho\Rightarrow\sigma} := \{M^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \forall_{N^\rho}(N^\rho \in \mathsf{SC}^\rho \to (MN)^\sigma \in \mathsf{SC}^\sigma)\}$.

$$\mathsf{SC} := \bigcup_{\tau\in T} \mathsf{SC}^\tau.$$

Цел: $\mathsf{SN} \subseteq \Lambda^T \subseteq \mathsf{SC} \subseteq \mathsf{SN}$.

Лема 1

$M \in \mathsf{SC}^{\vec{\rho}\Rightarrow\sigma}$ *точно тогава, когато* $\forall_{N_i\in\mathsf{SC}^{\rho_i}}\left(M\vec{N} \in SC^\sigma\right)$.

Силно изчислими термове

Дефиниция (силно изчислими термове)

Дефинираме SC^τ ("силно изчислим в типа τ") с индукция по τ:

- $\mathsf{SC}^\alpha := \mathsf{SN}^\alpha$,
- $\mathsf{SC}^{\rho\Rightarrow\sigma} := \{M^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \forall_{N^\rho}(N^\rho \in \mathsf{SC}^\rho \to (MN)^\sigma \in \mathsf{SC}^\sigma)\}$.

$$\mathsf{SC} := \bigcup_{\tau \in T} \mathsf{SC}^\tau.$$

Цел: $\mathsf{SN} \subseteq \Lambda^T \subseteq \mathsf{SC} \subseteq \mathsf{SN}$.

Лема 1

$M \in \mathsf{SC}^{\vec{\rho}\Rightarrow\sigma}$ *точно тогава, когато* $\forall_{N_i \in \mathsf{SC}^{\rho_i}}\left(M\vec{N} \in SC^\sigma\right)$.

Доказателство.

Индукция по дължината на $\vec{N}$. $\square$

Помощни леми

Лема 2

1. $\mathrm{SC}^\tau \subseteq \mathrm{SN}^\tau$,
2. $x^\tau \in \mathrm{SC}^\tau$.

Помощни леми

Лема 2

1. $\mathrm{SC}^\tau \subseteq \mathrm{SN}^\tau$,
2. $x^\tau \in \mathrm{SC}^\tau$.

Доказателство.

Пълна индукция по τ.

Помощни леми

Лема 2

1. $SC^{\tau} \subseteq SN^{\tau}$,
2. $x^{\tau} \in SC^{\tau}$.

Доказателство.

Пълна индукция по τ.

1. По ИП за 1 и 2 и Твърдение 4.

Помощни леми

Лема 2

1. $\mathrm{SC}^\tau \subseteq \mathrm{SN}^\tau$,
2. $x^\tau \in \mathrm{SC}^\tau$.

Доказателство.

Пълна индукция по τ.

1. По ИП за 1 и 2 и Твърдение 4.
2. По Лема 1, Твърдение 5 и ИП за 1 . $\square$

Помощни леми

Лема 2

1. $\mathrm{SC}^\tau \subseteq \mathrm{SN}^\tau$,
2. $x^\tau \in \mathrm{SC}^\tau$.

Доказателство.

Пълна индукция по τ.

1. По ИП за 1 и 2 и Твърдение 4.
2. По Лема 1, Твърдение 5 и ИП за 1 . □

Лема 3

Ако $M, N, \vec{P} \in \mathrm{SN}$ *и* $M[x \mapsto N]\vec{P} \in \mathrm{SC}^\tau$, *то* $(\lambda_x M)N\vec{P} \in \mathrm{SC}^\tau$.

Помощни леми

Лема 2

1. $\mathsf{SC}^\tau \subseteq \mathsf{SN}^\tau$,
2. $x^\tau \in \mathsf{SC}^\tau$.

Доказателство.

Пълна индукция по τ.

1. По ИП за 1 и 2 и Твърдение 4.
2. По Лема 1, Твърдение 5 и ИП за 1 . □

Лема 3

Ако $M, N, \vec{P} \in \mathsf{SN}$ *и* $M[x \mapsto N]\vec{P} \in \mathsf{SC}^\tau$, *то* $(\lambda_x M)N\vec{P} \in \mathsf{SC}^\tau$.

Доказателство.

Индукция по τ и Твърдение 6. □

Субституции

Дефиниция (Субституция)

Субституция наричаме функция $\xi : V^T \to \Lambda^T$, за която $\xi(x^\tau) \equiv M^\tau$.

Субституции

Дефиниция (Субституция)

Субституция наричаме функция $\xi : V^T \to \Lambda^T$, за която $\xi(x^\tau) \equiv M^\tau$.

Дефиниция (Модифицирана субституция)

Нека ξ е субституция, $x^\tau \in V^T$, а $M^\tau \in \Lambda^T$. Дефинираме модифицираната субституция ξ_x^M както следва:

$$\xi_x^M(y) := \begin{cases} M, & \text{ако } x \equiv y, \\ \xi(y), & \text{ако } x \not\equiv y. \end{cases}$$

Субституции

Дефиниция (Субституция)

Субституция наричаме функция $\xi : V^T \to \Lambda^T$, за която $\xi(x^\tau) \equiv M^\tau$.

Дефиниция (Модифицирана субституция)

Нека ξ е субституция, $x^\tau \in V^T$, а $M^\tau \in \Lambda^T$. Дефинираме модифицираната субституция ξ_x^M както следва:

$$\xi_x^M(y) := \begin{cases} M, & \text{ако } x \equiv y, \\ \xi(y), & \text{ако } x \not\equiv y. \end{cases}$$

Примери: $[x \mapsto M] := \iota_x^M, \xi_x^{\xi(x)} = \xi$

Силно изчислими субституции

Дефиниция (прилагане на субституция)

Нека ξ е субституция, $x^\tau \in V^T$, $M^\tau \in \Lambda^T$, тогава дефинираме индуктивно $M\xi$ — прилагането на ξ над M:

1. $x\xi := \xi(x)$,
2. $(M_1 M_2)\xi := (M_1\xi)(M_2\xi)$,
3. $(\lambda_x N)\xi := \lambda_x(N\xi_x^x)$.

Силно изчислими субституции

Дефиниция (прилагане на субституция)

Нека ξ е субституция, $x^\tau \in V^T$, $M^\tau \in \Lambda^T$, тогава дефинираме индуктивно $M\xi$ — прилагането на ξ над M:

1. $x\xi := \xi(x)$,
2. $(M_1 M_2)\xi := (M_1\xi)(M_2\xi)$,
3. $(\lambda_x N)\xi := \lambda_x(N\xi_x^x)$.

По конвенция считаме, че $\mathrm{FV}[\mathrm{ran}(\xi \restriction \mathrm{FV}(M))] \cap \mathrm{BV}(M) = \emptyset$.

$[x \mapsto N]$

$FV(N) \cap BV(M) = \emptyset$

$\xi = u_x^N$

Силно изчислими субституции

Дефиниция (прилагане на субституция)

Нека ξ е субституция, $x^\tau \in V^T$, $M^\tau \in \Lambda^T$, тогава дефинираме индуктивно $M\xi$ — прилагането на ξ над M:

1. $x\xi := \xi(x)$,
2. $(M_1 M_2)\xi := (M_1\xi)(M_2\xi)$,
3. $(\lambda_x N)\xi := \lambda_x(N\xi_x^x)$.

По конвенция считаме, че $\mathrm{FV}[\mathrm{ran}(\xi \restriction \mathrm{FV}(M))] \cap \mathrm{BV}(M) = \emptyset$.

Дефиниция (силно изчислими субституции)

Казваме, че субституцията ξ е силно изчислима, ако $\mathrm{ran}\,\xi \subseteq \mathrm{SC}$.

Пример: ι е с.и.

Леми за силно изчислимите субституции

Лема 4

Нека ξ е силно изчислима, а $M \in \Lambda^T$, тогава $M\xi \in \mathsf{SC}$.

Леми за силно изчислимите субституции

Лема 4

Нека ξ е силно изчислима, а $M \in \Lambda^T$, тогава $M\xi \in \mathrm{SC}$.

Доказателство.

Индукция по M.

Леми за силно изчислимите субституции

Лема 4

Нека ξ е силно изчислима, а $M \in \Lambda^T$, тогава $M\xi \in \mathrm{SC}$.

Доказателство.

Индукция по M.

1. $M \equiv x$ по дефиницията на силно изчислима субституция.

$\square$

Леми за силно изчислимите субституции

Лема 4

Нека ξ е силно изчислима, а $M \in \Lambda^T$, тогава $M\xi \in \mathsf{SC}$.

Доказателство.

Индукция по M.

1. $M \equiv x$ по дефиницията на силно изчислима субституция.
2. $M \equiv M_1 M_2$ по ИП и дефиницията на SC.

$\square$

Леми за силно изчислимите субституции

Лема 4

Нека ξ е силно изчислима, а $M \in \Lambda^T$, тогава $M\xi \in \mathrm{SC}$.

Доказателство.

Индукция по M.

1. $M \equiv x$ по дефиницията на силно изчислима субституция.
2. $M \equiv M_1 M_2$ по ИП и дефиницията на SC.
3. $M \equiv \lambda_x N$ по ИП, Лема 2 и Лема 3.

□

Теорема за силната нормализация

Следствие 1

$\Lambda^T \subseteq SC$.

Теорема за силната нормализация

Следствие 1

$\Lambda^T \subseteq \mathrm{SC}$.

Доказателство.

Субституцията $\iota(x) := x$ е силно изчислима. $\square$

Теорема за силната нормализация

Следствие 1

$\Lambda^T \subseteq SC$.

Доказателство.

Субституцията $\iota(x) := x$ е силно изчислима. $\square$

Теорема (за силната нормализация)

$\Lambda^T = SN$.

Теорема за силната нормализация

Следствие 1

$\Lambda^T \subseteq \mathrm{SC}$.

Доказателство.

Субституцията $\iota(x) := x$ е силно изчислима. □

Теорема (за силната нормализация)

$\Lambda^T = SN$.

Доказателство.

От Следствие 1 и Лема 2 имаме, че $\Lambda^T \subseteq SC \subseteq SN \subseteq \Lambda^T$. □