Типови системи

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

7 май 2019 г.

λ-смятане с прости типове

- Типове
  $\rho, \sigma \quad ::= \quad \alpha \mid \rho \Rightarrow \sigma$
- Термове
  $M, N \quad ::= \quad x^\rho \mid (M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma \mid (\lambda_{x^\rho} M^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma}$
- Редукции
  $(\lambda_x M)N \stackrel{\beta}{\to} M[x \mapsto N]$
  $(\lambda_x Mx) \stackrel{\eta}{\to} M$, където $x \notin FV(M)$
- Силно нормализируема
- Изразителна сила: разширени полиноми
  $$p(x) \quad ::= \quad 0 \mid 1 \mid x \mid p_1(x) + p_2(x) \mid p_1(x).p_2(x) \mid p_1(p_2(x)) \mid \min(x,1) \mid 1 - \min(x,1)$$

λ-смятане с произведение

- Типове
  $\rho, \sigma \quad ::= \quad \alpha \mid \rho \Rightarrow \sigma \mid \rho \otimes \sigma$
- Термове
  $M, N \quad ::= \quad x^\rho \mid (M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)^\sigma \mid (\lambda_{x^\rho} M^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma} \mid$
  $\langle M^\rho, N^\sigma \rangle^{\rho \otimes \sigma} \mid (M^{\rho \otimes \sigma}{\llcorner})^\rho \mid (M^{\rho \otimes \sigma}{\lrcorner})^\sigma$
- Редукции
  $(\lambda_x M)N \xrightarrow{\beta} M[x \mapsto N] \qquad \langle M, N \rangle{\llcorner} \xrightarrow{\beta} M \qquad \langle M, N \rangle{\lrcorner} \xrightarrow{\beta} N$
  $(\lambda_x Mx) \xrightarrow{\eta} M$, където $x \notin \mathrm{FV}(M) \qquad \langle M{\llcorner}, M{\lrcorner} \rangle \xrightarrow{\eta} M$
- Силно нормализируема
- Изразителна сила: не се променя
- Произведението е "синтактична захар"

Система на Hindley-Milner

- Монотипове
  $\rho, \sigma \quad ::= \quad \alpha \mid \rho \Rightarrow \sigma$
- Политипове
  $\tau \quad ::= \quad \sigma \mid \forall_\alpha \tau$
- Безтипови термове
  $M, N \quad ::= \quad x \mid MN \mid \lambda_x M \mid \mathbf{let}\ x = M\ \mathbf{in}\ N$
- Наредба на типовете
  $$\frac{\sigma_2 \equiv \sigma_1[\vec{\alpha} \mapsto \vec{\rho}]}{\forall_{\vec{\alpha}} \sigma_1 \sqsubseteq \forall_{\vec{\beta}} \sigma_2}\ \vec{\beta} \notin FV(\forall_{\vec{\alpha}} \sigma_1)$$
- Редукции
  $(\lambda_x M)N \stackrel{\beta}{\to} M[x \mapsto N] \qquad \mathbf{let}\ x = N\ \mathbf{in}\ M \stackrel{\beta}{\to} M[x \mapsto N]$
  $(\lambda_x Mx) \stackrel{\eta}{\to} N$, където $x \notin \mathrm{FV}(M)$

Система на Hindley-Milner: типова изводимост

$$\frac{x : \tau \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \tau} \qquad \frac{\Gamma, x : \rho \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda_x M : \rho \Rightarrow \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \rho \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash MN : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \qquad \Gamma, x : \tau \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \textbf{let } x = M \textbf{ in } N : \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau_1 \qquad \tau_1 \sqsubseteq \tau_2}{\Gamma \vdash M : \tau_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M : \forall_\alpha \tau}\ \alpha \notin FV(\Gamma)$$

- Типовата изводимост е разрешима (Алгоритъм W)
- Силно нормализируема

Programming Computable Functionals (PCF)

- Типове

$$\rho, \sigma \quad ::= \quad \mathsf{N} \mid \mathsf{B} \mid \rho \Rightarrow \sigma \mid \rho \otimes \sigma$$

- Термове

$$\begin{aligned} M, N \quad ::= \quad & x^\rho \mid (M^{\rho \Rightarrow \sigma} N^\rho)^\sigma \mid (\lambda_{x^\rho} M^\sigma)^{\rho \Rightarrow \sigma} \mid \\ & \langle M^\rho, N^\sigma \rangle^{\rho \otimes \sigma} \mid \mathsf{Split}_{\rho,\sigma,\tau} : \rho \otimes \sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \mid \\ & \mathsf{tt}^\mathsf{B} \mid \mathsf{ff}^\mathsf{B} \mid 0^\mathsf{N} \mid \mathsf{S}^{\mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{N}} \mid \mathsf{P}^{\mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{N}} \mid \mathsf{Z}^{\mathsf{N} \Rightarrow \mathsf{B}} \mid \\ & \mathsf{Cases}_\tau : \mathsf{B} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \mid \mathsf{Y}_\tau : (\tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \end{aligned}$$

Programming Computable Functionals (PCF): редукции

- Редукции

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
(\lambda_x s)t & \xrightarrow{\beta} & s[x \mapsto t], & \mathsf{P}\,0 & \xrightarrow{\beta} & 0, \\
\mathsf{Split}\,\langle s, t\rangle\, f & \xrightarrow{\beta} & f\,s\,t, & \mathsf{P}\,(\mathsf{S}n) & \xrightarrow{\beta} & n \\
\mathsf{Cases}\,\mathsf{tt}\,s\,t & \xrightarrow{\beta} & s, & \mathsf{Z}\,0 & \xrightarrow{\beta} & \mathsf{tt}, \\
\mathsf{Cases}\,\mathsf{ff}\,s\,t & \xrightarrow{\beta} & t, & \mathsf{Z}\,(\mathsf{S}n) & \xrightarrow{\beta} & \mathsf{ff}, \\
\mathsf{Y}\,t & \xrightarrow{\beta} & t(\mathsf{Y}\,t) & & &
\end{array}
$$

- Не е силно нормализируема
- Изразителна сила: всички изчислими функции

Система T на Gödel

- Типове

$$\rho, \sigma \quad ::= \quad \mathsf{N} \mid \mathsf{B} \mid \rho \Rightarrow \sigma \mid \rho \otimes \sigma$$

- Термове

$$\begin{aligned} M, N \quad ::= \quad & x^\rho \mid (M^{\rho\Rightarrow\sigma} N^\rho)^\sigma \mid (\lambda_{x^\rho} M^\sigma)^{\rho\Rightarrow\sigma} \mid \\ & \langle M^\rho, N^\sigma \rangle^{\rho\otimes\sigma} \mid \mathsf{Split}_{\rho,\sigma,\tau} : \rho \otimes \sigma \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \mid \\ & \mathsf{tt}^\mathsf{B} \mid \mathsf{ff}^\mathsf{B} \mid 0^\mathsf{N} \mid \mathsf{S}^{\mathsf{N}\Rightarrow\mathsf{N}} \mid \\ & \mathsf{Cases}_\tau : \mathsf{B} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau \mid \\ & \mathcal{R}_\tau : \mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow (\mathsf{N} \Rightarrow \tau \Rightarrow \tau) \Rightarrow \tau \end{aligned}$$

Система T на Gödel: редукции

- Редукции

$$\begin{aligned}
(\lambda_x s)t &\xrightarrow{\beta} s[x \mapsto t], & \mathsf{Cases}\,\mathsf{tt}\,s\,t &\xrightarrow{\beta} s,\\
\mathsf{Split}\,\langle s, t\rangle\,f &\xrightarrow{\beta} f\,s\,t, & \mathsf{Cases}\,\mathsf{ff}\,s\,t &\xrightarrow{\beta} t,\\
\mathcal{R}\,0\,s\,t &\xrightarrow{\beta} s, & &\\
\mathcal{R}\,(\mathsf{S}n)\,s\,t &\xrightarrow{\beta} t\,n\,(\mathcal{R}\,n\,s\,t). & &
\end{aligned}$$

- Силно нормализируема
- Изразителна сила: доказуемо тотални функции