Системи за изразяване на доказателства

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

14–17 май 2019 г.

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Разглеждаме език предикатно смятане от първи ред $\mathcal{L} := \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$:

- $\mathcal{F}$ е списък от *функционални символи с брой аргументи*

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Разглеждаме език предикатно смятане от първи ред $\mathcal{L} := \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$:

- $\mathcal{F}$ е списък от *функционални символи с брой аргументи*
    - 0-местните функционални символи наричаме *константи*

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Разглеждаме език предикатно смятане от първи ред $\mathcal{L} := \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$:

- $\mathcal{F}$ е списък от *функционални символи с брой аргументи*
    - 0-местните функционални символи наричаме *константи*
- $\mathcal{P}$ е списък от *предикатни символи с брой аргументи*

Език на предикатното смятане

Считаме, че разполагаме с изброимо безкрайно множество V от обектови променливи.

Разглеждаме език предикатно смятане от първи ред $\mathcal{L} := \langle \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$:

- $\mathcal{F}$ е списък от *функционални символи с брой аргументи*
    - 0-местните функционални символи наричаме *константи*
- $\mathcal{P}$ е списък от *предикатни символи с брой аргументи*
- $\mathcal{F} \cap \mathcal{P} = \mathcal{F} \cap V = \mathcal{P} \cap V = \emptyset$

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(f^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е терм.

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(f^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е терм.

Дефиниция (Формули)

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(f^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е терм.

Дефиниция (Формули)

- Ако $p^n \in \mathcal{P}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(p^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е (атомарна) формула.

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и $t_1, \dots t_n$ са термове, то $(f^n\, t_1\, t_2\, \dots\, t_n)$ е терм.

Дефиниция (Формули)

- Ако $p^n \in \mathcal{P}$ и $t_1, \dots t_n$ са термове, то $(p^n\, t_1\, t_2\, \dots\, t_n)$ е (атомарна) формула.
- Ако A и B са формули, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \to B)$ са формули.

Термове и формули

Нека фиксираме език на предикатното смятане $\mathcal{L}$.

Дефиниция (Термове)

- Ако $x \in V$, то x е терм.
- Ако $f^n \in \mathcal{F}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(f^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е терм.

Дефиниция (Формули)

- Ако $p^n \in \mathcal{P}$ и $t_1, \ldots t_n$ са термове, то $(p^n\, t_1\, t_2\, \ldots\, t_n)$ е (атомарна) формула.
- Ако A и B са формули, то $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \to B)$ са формули.
- Ако $x \in V$ и A е формула, то $(\forall_x A)$ и $(\exists_x A)$ са формули.

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\land$ и $\lor$ са лявоасоциативни, а $\to$ е дясноасоциативна

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\land$ и $\lor$ са лявоасоциативни, а $\to$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\ldots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \ldots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\ldots,x_n}$

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\wedge$ и $\vee$ са лявоасоциативни, а $\rightarrow$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \dots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\dots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \dots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\dots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\wedge$ и $\vee$ са лявоасоциативни, а $\rightarrow$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \dots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\dots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \dots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\dots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \rightarrow \perp)$

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\wedge$ и $\vee$ са лявоасоциативни, а $\rightarrow$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\ldots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \ldots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\ldots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \rightarrow \perp)$
- дефинираме $(A \leftrightarrow B) := \big((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)\big)$

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\land$ и $\lor$ са лявоасоциативни, а $\to$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\ldots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \ldots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\ldots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \to \perp)$
- дефинираме $(A \leftrightarrow B) := \big((A \to B) \land (B \to A)\big)$
- считаме, че логическите операции са подредени по приоритет в следния ред: $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\land$ и $\lor$ са лявоасоциативни, а $\to$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\ldots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \ldots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\ldots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \to \perp)$
- дефинираме $(A \leftrightarrow B) := ((A \to B) \land (B \to A))$
- считаме, че логическите операции са подредени по приоритет в следния ред: $\land$, $\lor$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
- дефинираме FV за термове и формули и BV за формули както в λ-смятането

Нотации и конвенции

Използваме следните конвенции и съкращения:

- изпускаме най-външните скоби
- считаме, че $\wedge$ и $\vee$ са лявоасоциативни, а $\to$ е дясноасоциативна
- записваме $\forall_{x_1} \ldots \forall_{x_n}$ като $\forall_{x_1,\ldots,x_n}$ и $\exists_{x_1} \ldots \exists_{x_n}$ като $\exists_{x_1,\ldots,x_n}$
- фиксираме специална 0-местна предикатна константа $\perp^0$, която ще интерпретираме като лъжа
- дефинираме $(\neg A) := (A \to \perp)$
- дефинираме $(A \leftrightarrow B) := ((A \to B) \wedge (B \to A))$
- считаме, че логическите операции са подредени по приоритет в следния ред: $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
- дефинираме FV за термове и формули и BV за формули както в λ-смятането
- дефинираме субституция $[x \mapsto t]$ в термове и формули както в λ-смятането, грижейки се кванторите $\forall$ и $\exists$ да не прихващат променливи

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- c класическа логика (Gottlob Frege)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- c класическа логика (Gottlob Frege)
  - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- класическа логика (Gottlob Frege)
  - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим
- интуиционистка (конструктивна) логика (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Arend Heyting)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- класическа логика (Gottlob Frege)
  - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим
- интуиционистка (конструктивна) логика (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Arend Heyting)
  - в тази логика можем да докажем $\exists_x A$ само ако посочим терм t удовлетворяващ A

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- класическа логика (Gottlob Frege)
  - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим
- интуиционистка (конструктивна) логика (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Arend Heyting)
  - в тази логика можем да докажем $\exists_x A$ само ако посочим терм t удовлетворяващ A
- минимална логика (Ingebrigt Johansson)

Системи за описание на доказателства

Искаме да дефинираме синтактични обекти, които ще представят формални доказателства в предикатното смятане от първи ред.

Ще разгледаме три вида системи за описание на доказателства:

- Аксиоматични системи (David Hilbert)
- Системи за секвенциално смятане (Gerhard Gentzen)
- Системи за естествен извод (Gerhard Gentzen, Dag Prawitz)

Ще разглеждаме три класа логически системи:

- класическа логика (Gottlob Frege)
  - това е предикатното смятане, с което сме свикнали да работим
- интуиционистка (конструктивна) логика (Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Arend Heyting)
  - в тази логика можем да докажем $\exists_x A$ само ако посочим терм t удовлетворяващ A
- минимална логика (Ingebrigt Johansson)
  - $\perp$ вече не означава лъжа, а е обикновен предикатен символ

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
2. $A \to B \to A$

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $(\qquad B \to C) \to (\qquad B) \to \qquad C$
2. $A \to B \to A$
3. $A \land B \to A, \quad A \land B \to B$
4. $A \to B \to A \land B$

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
2. $A \to B \to A$
3. $A \wedge B \to A, \quad A \wedge B \to B$
4. $A \to B \to A \wedge B$
5. $A \to A \vee B, \quad B \to A \vee B$
6. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \vee B \to C$

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
2. $A \to B \to A$
3. $A \land B \to A, \quad A \land B \to B$
4. $A \to B \to A \land B$
5. $A \to A \lor B, \quad B \to A \lor B$
6. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \lor B \to C$
7. $\forall_x A \to A[x \mapsto t]$
8. $\forall_x (B \to A) \to (B \to \forall_x A)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
2. $A \to B \to A$
3. $A \land B \to A, \quad A \land B \to B$
4. $A \to B \to A \land B$
5. $A \to A \lor B, \quad B \to A \lor B$
6. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \lor B \to C$
7. $\forall_x A \to A[x \mapsto t]$
8. $\forall_x (B \to A) \to (B \to \forall_x A)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$
9. $A[x \mapsto t] \to \exists_x A$
10. $\forall_x (A \to B) \to (\exists_x A \to B)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

1. $\underbrace{(A \to \overset{\overset{A \to A}{\equiv}}{B} \to \overset{A}{\cancel{C}})} \to (A \to \overset{\overset{A \to A}{\equiv}}{B}) \to \underbrace{A \to \overset{A}{\cancel{C}}}$
2. $A \to B \to A$
3. $A \wedge B \to A, \quad A \wedge B \to B$
4. $A \to B \to A \wedge B$
5. $A \to A \vee B, \quad B \to A \vee B$
6. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \vee B \to C$
7. $\forall_x A \to A[x \mapsto t]$
8. $\forall_x (B \to A) \to (B \to \forall_x A)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$
9. $A[x \mapsto t] \to \exists_x A$
10. $\forall_x (A \to B) \to (\exists_x A \to B)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$

Допълнителна аксиома за Hi

11. $\bot \to A$ (ex falso quodlibet)

Хилбертови системи: Hm, Hi, Hc

Аксиоми на Hm

S 1. $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$
K 2. $A \to B \to A$
3. $A \land B \to A, \quad A \land B \to B$
4. $A \to B \to A \land B$
5. $A \to A \lor B, \quad B \to A \lor B$
6. $(A \to C) \to (B \to C) \to A \lor B \to C$
7. $\forall_x A \to A[x \mapsto t]$
8. $\forall_x (B \to A) \to (B \to \forall_x A)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$
9. $A[x \mapsto t] \to \exists_x A$
10. $\forall_x (A \to B) \to (\exists_x A \to B)$, ако $x \notin \mathrm{FV}(B)$

Допълнителна аксиома за Hi

11. $\bot \to A$ (ex falso quodlibet)

Допълнителна аксиома за Hc

11. $\neg\neg A \to A$ (стабилност)

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на H[mic]

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на H[mic]

(MP) $A_k \equiv A_j \to A_i$ за някои $j, k < i$

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

(As) $A_i \in \Gamma$

(Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на H[mic]

(MP) $A_k \equiv A_j \to A_i$ за някои $j, k < i$

(Gen) $A_i \equiv \forall_x A_j$ за някое $j < i$, ако $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$.

Доказателства в Хилбертови системи

Дефиниция

Доказателство на A от множество от допускания Γ в H[mic], наричаме списък от формули $A_1, \ldots, A_n \equiv A$, където за всяко A_i важи едно от следните правила:

- (As) $A_i \in \Gamma$
- (Ax) A_i е инстанция на някоя от аксиомите на H[mic]
- (MP) $A_k \equiv A_j \to A_i$ за някои $j, k < i$
- (Gen) $A_i \equiv \forall_x A_j$ за някое $j < i$, ако $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$.

Отбелязваме $\Gamma \vdash_{H[mic]} A$.

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$
- $A \wedge B \vdash B \wedge A$

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$
- $A \land B \vdash B \land A$
- $\forall_x A \vdash \exists_x A$

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$
- $A \land B \vdash B \land A$
- $\forall_x A \vdash \exists_x A$
- $\vdash A \to A$

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$
- $A \land B \vdash B \land A$
- $\forall_x A \vdash \exists_x A$
- $\vdash A \to A$

Теорема (за дедукцията)

$\Gamma \vdash A \to B$ *тогава и само тогава когато* $\Gamma, A \vdash B$.

Теореми за дедукцията и генерализацията

Да намерят доказателства на:

- $A \vdash B \to A$
- $A \land B \vdash B \land A$
- $\forall_x A \vdash \exists_x A$
- $\vdash A \to A$

Теорема (за дедукцията)

$\Gamma \vdash A \to B$ *тогава и само тогава когато* $\Gamma, A \vdash B$.

Теорема (за генерализацията)

$\Gamma \vdash \forall_x A$ *тогава и само тогава когато* $\Gamma \vdash A$ *и* $x \notin \mathrm{FV}[\Gamma]$.

Теореми за коректност и пълнота

Дефиниция

Казваме, че $\Gamma \models A$, ако A е вярна във всеки модел на Γ.

Теореми за коректност и пълнота

Дефиниция

Казваме, че $\Gamma \models A$, ако A е вярна във всеки модел на Γ.

Теорема (Коректност)

Ако $\Gamma \vdash A$, *то* $\Gamma \models A$.

Теореми за коректност и пълнота

Дефиниция

Казваме, че $\Gamma \models A$, ако A е вярна във всеки модел на Γ.

Теорема (Коректност)

Ако $\Gamma \vdash A$, *то* $\Gamma \models A$.

Теорема (Пълнота, Gödel)

Ако $\Gamma \models_{c} A$, *то* $\Gamma \vdash_{Hc} A$.

Теореми за коректност и пълнота

Дефиниция

Казваме, че $\Gamma \models A$, ако A е вярна във всеки модел на Γ.

Теорема (Коректност)

Ако $\Gamma \vdash A$, *то* $\Gamma \models A$.

Теорема (Пълнота, Gödel)

Ако $\Gamma \models_{c} A$, *то* $\Gamma \vdash_{Hc} A$.

Доказателство.

Допускаме, че $\Gamma \not\vdash A$. Тогава можем да построим термален (Ербранов) модел на $\Gamma \cup \{\neg A\}$, което е в противоречие с $\Gamma \models A$. ☐

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n \big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник...)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n \big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник...)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (...различен от 0)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n\big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник…)
3. $\forall_n\neg(0 = S\,n)$ (…различен от 0)
4. $\forall_n(n = n)$ (рефлексивност)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n\big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник. . .)
3. $\forall_n\neg(0 = S\,n)$ (. . . различен от 0)
4. $\forall_n(n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m}(n = m \to m = n)$ (симетричност)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n \big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник…)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (…различен от 0)
4. $\forall_n (n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m} (n = m \to m = n)$ (симетричност)
6. $\forall_{n,m,k} (n = m \to m = k \to n = k)$ (транзитивност)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n \big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник...)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (... различен от 0)
4. $\forall_n (n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m} (n = m \to m = n)$ (симетричност)
6. $\forall_{n,m,k} (n = m \to m = k \to n = k)$ (транзитивност)
7. $\forall_{n,m} (n = m \to N\,n \to N\,m)$ (заместване в N)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \left\{0^0, S^1\right\}$, $\mathcal{P} := \left\{N^1, =^2\right\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n\big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник...)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (...различен от 0)
4. $\forall_n(n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m}(n = m \to m = n)$ (симетричност)
6. $\forall_{n,m,k}(n = m \to m = k \to n = k)$ (транзитивност)
7. $\forall_{n,m}(n = m \to N\,n \to N\,m)$ (заместване в N)
8. $\forall_{n,m}(n = m \to S\,n = S\,m)$ (заместване в S)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n(N\,n \to N(S\,n))$ (всяко естествено число има наследник...)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (...различен от 0)
4. $\forall_n(n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m}(n = m \to m = n)$ (симетричност)
6. $\forall_{n,m,k}(n = m \to m = k \to n = k)$ (транзитивност)
7. $\forall_{n,m}(n = m \to N\,n \to N\,m)$ (заместване в N)
8. $\forall_{n,m}(n = m \to S\,n = S\,m)$ (заместване в S)
9. $\forall_{n,m}(S\,n = S\,m \to n = m)$ (инективност на S)

Пример: Пеанова аритметика (PA)

Разглеждаме език $\mathcal{F} := \{0^0, S^1\}$, $\mathcal{P} := \{N^1, =^2\}$.
За краткост ще отбелязваме $\mathbf{A}(t) := \mathbf{A}[n \mapsto t]$.

1. $N\,0$ (0 е естествено число)
2. $\forall_n\big(N\,n \to N(S\,n)\big)$ (всяко естествено число има наследник. . .)
3. $\forall_n \neg(0 = S\,n)$ (. . . различен от 0)
4. $\forall_n(n = n)$ (рефлексивност)
5. $\forall_{n,m}(n = m \to m = n)$ (симетричност)
6. $\forall_{n,m,k}(n = m \to m = k \to n = k)$ (транзитивност)
7. $\forall_{n,m}(n = m \to N\,n \to N\,m)$ (заместване в N)
8. $\forall_{n,m}(n = m \to S\,n = S\,m)$ (заместване в S)
9. $\forall_{n,m}(S\,n = S\,m \to n = m)$ (инективност на S)
10. $\mathbf{A}(0) \to \forall_n\big(\mathbf{A}(n) \to \mathbf{A}(S(n))\big) \to \forall_n \mathbf{A}(n)$ (индукция)

m
A

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* $\mathrm{PA} \nvdash G$ *и* $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$*.*

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* $\mathrm{PA} \nvdash G$ *и* $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$.

Доказателство.

Нека $P(u, x) :=$ “u е код на доказателство в PA на формулата с код x”.

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* PA $\nvdash G$ *и* PA $\nvdash \neg G$*.*

Доказателство.

Нека $P(u, x) :=$ “u е код на доказателство в PA на формулата с код x”.
Разглеждаме оператора над формули $\Gamma(A) := \nexists_u P(u,$ “кодът на A”$)$.

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* $\mathrm{PA} \nvdash G$ *и* $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$*.*

Доказателство.

Нека $P(u,x) :=$ "u е код на доказателство в PA на формулата с код x".
Разглеждаме оператора над формули $\Gamma(A) := \nexists_u P(u,$"кодът на A").
Той има неподвижна точка G, за която: $\mathrm{PA} \vdash G \leftrightarrow$ "G няма доказателство в PA".

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* $\mathrm{PA} \nvdash G$ *и* $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$*.*

Доказателство.

Нека $P(u,x) :=$ “u е код на доказателство в PA на формулата с код x”.
Разглеждаме оператора над формули $\Gamma(A) := \nexists_u P(u,$“кодът на A”$)$.
Той има неподвижна точка G, за която: $\mathrm{PA} \vdash G \leftrightarrow$ “G няма доказателство в PA”.
Да допуснем, че $\mathrm{PA} \vdash G$, но тогава $\mathrm{PA} \nvdash G$ — противоречие!

Първа теорема за непълнота на Gödel

Дефиниция

Казваме, че множество от формули Γ е *противоречиво*, ако има формула A, такава че $\Gamma \vdash A$ и $\Gamma \vdash \neg A$.

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то има* G*, такава че* $\mathrm{PA} \nvdash G$ *и* $\mathrm{PA} \nvdash \neg G$*.*

Доказателство.

Нека $P(u, x) :=$ “u е код на доказателство в PA на формулата с код x”.
Разглеждаме оператора над формули $\Gamma(A) := \nexists_u P(u,$ “кодът на A”$)$.
Той има неподвижна точка G, за която: $\mathrm{PA} \vdash G \leftrightarrow$ “G няма доказателство в PA”.
Да допуснем, че $\mathrm{PA} \vdash G$, но тогава $\mathrm{PA} \nvdash G$ — противоречие!
Да допуснем, че $\mathrm{PA} \vdash \neg G$, но тогава $\mathrm{PA} \vdash G$, което би означавало, че PA е противоречива. $\square$

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$Neg(x, y) \quad := \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},$$

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned} Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\ Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big), \end{aligned}$$

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned} Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\ Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\ Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v}\big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big), \end{aligned}$$

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned}
Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\
Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\
Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v} \big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big),\\
FT &:= Con \to Und(g), \text{ където } g \text{ е кодът на } G.
\end{aligned}$$

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned} Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\ Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\ Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v}\big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big),\\ FT &:= Con \to Und(g)\text{, където } g \text{ е кодът на } G. \end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то* PA $\nvdash$ *Con.*

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned}
Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\
Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\
Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v}\big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big),\\
FT &:= Con \to Und(g)\text{, където } g \text{ е кодът на } G.
\end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то* PA $\nvdash$ *Con*.

Доказателство.

Да допуснем, че PA $\vdash$ *Con*.

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned}
Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\
Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\
Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v} \big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big),\\
FT &:= Con \to Und(g)\text{, където } g \text{ е кодът на } G.
\end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то* PA $\nvdash Con$.

Доказателство.

Да допуснем, че PA $\vdash Con$. Кодираме доказателството на първата теорема и получаваме PA $\vdash FT$.

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned} Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\ Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \wedge \nexists_u P(u,y)\big),\\ Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v}\big(Neg(x,y) \wedge P(u,x) \wedge P(v,y)\big),\\ FT &:= Con \to Und(g)\text{, където } g \text{ е кодът на } G. \end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то* PA $\nvdash$ *Con*.

Доказателство.

Да допуснем, че PA $\vdash$ *Con*. Кодираме доказателството на първата теорема и получаваме PA $\vdash FT$. Тогава PA $\vdash \nexists_u P(u,g)$.

Втора теорема за непълнота на Gödel

Можем да дефинираме следните формули:

$$\begin{aligned} Neg(x,y) &:= \text{“ако } x \text{ е кодът на } A\text{, то } y \text{ е кодът на } \neg A\text{”},\\ Und(x) &:= \forall_y \big(Neg(x,y) \to \nexists_u P(u,x) \land \nexists_u P(u,y)\big),\\ Con &:= \neg\exists_{x,y,u,v}\big(Neg(x,y) \land P(u,x) \land P(v,y)\big),\\ FT &:= Con \to Und(g)\text{, където } g \text{ е кодът на } G. \end{aligned}$$

Теорема (Gödel)

Ако PA *е непротиворечива, то* PA $\nvdash$ *Con*.

Доказателство.

Да допуснем, че PA $\vdash$ *Con*. Кодираме доказателството на първата теорема и получаваме PA $\vdash$ *FT*. Тогава PA $\vdash \nexists_u P(u,g)$.
Но по дефиницията на G, това означава, че PA $\vdash G$, което е противоречие с първата теорема. ☐

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*.

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*.
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна".

Строим дървета от секвенти; $\Gamma \vdash A$, ако има дърво с корен $\Gamma \Rightarrow A$.

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*.
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна".

Строим дървета от секвенти; $\Gamma \vdash A$, ако има дърво с корен $\Gamma \Rightarrow A$.
Аксиоми (G1c)

$$\mathrm{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad\qquad \mathrm{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*. "Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна".

Строим дървета от секвенти; $\Gamma \vdash A$, ако има дърво с корен $\Gamma \Rightarrow A$.

Аксиоми (G1c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad\qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Структурни правила (G1c)

$$\text{LW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{RW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G1c

Дефиниция

Ако Γ и Δ са мултимножества от формули, $\Gamma \Rightarrow \Delta$ наричаме *секвент*. “Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то със сигурност някоя от формулите в Δ също е вярна”.

Строим дървета от секвенти; $\Gamma \vdash A$, ако има дърво с корен $\Gamma \Rightarrow A$.

Аксиоми (G1c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}$$

Структурни правила (G1c)

$$\text{LW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{RW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

$$\text{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{RC}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\mathrm{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\mathrm{L}\!\rightarrow\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\!\rightarrow\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \rightarrow B}$$

$$\mathrm{L}\forall\ \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma\Delta)$$

Секвенциално смятане: G1c

Логически правила (G1c)

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\mathrm{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

$$\mathrm{L}\forall\ \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$\mathrm{L}\exists\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma\Delta) \qquad \mathrm{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна".

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна".
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие".

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми (G1[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}\ \text{(само за G1i)}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна".
"Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие".

Аксиоми (G1[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad\qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow}\ \text{(само за G1i)}$$

Структурни правила (G1[mi])

$$\text{LW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad\qquad \text{RW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Дефиниция

Ако Γ е мултимножество от формули, а C е формула, то $\Gamma \Rightarrow C$ и $\Gamma \Rightarrow$ наричаме *конструктивни секвенти*.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, то C също е вярна”.
“Ако допуснем, че всички формули в Γ са верни, получаваме противоречие”.

Аксиоми (G1[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{A \Rightarrow A} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot \Rightarrow} \text{ (само за G1i)}$$

Структурни правила (G1[mi])

$$\text{LW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \text{RW}\ \frac{\Gamma \Rightarrow}{\Gamma \Rightarrow A}$$

$$\text{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]}\ (i = 0, 1) \qquad\qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]}\ (i = 0, 1) \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\text{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \to B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \text{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$\text{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\mathrm{L}\!\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \to B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\!\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$\mathrm{L}\forall\ \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$$

Секвенциално смятане: G1m, G1i

Логически правила (G1[mi])

$$\mathrm{L}\wedge\ \frac{A_i, \Gamma \Rightarrow [C]}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow [C]}\ (i = 0, 1) \qquad \mathrm{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\mathrm{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C] \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\mathrm{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow [C]}{A \to B, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$\mathrm{L}\forall\ \frac{A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow [C]}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow [C]} \qquad \mathrm{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$$

$$\mathrm{L}\exists\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow [C]}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow [C]}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma, C) \qquad \mathrm{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists_x A}$$

Свойства на G1

Задача

Да се докажат всички Хилбертови аксиоми в G1.

Свойства на G1

Задача

Да се докажат всички Хилбертови аксиоми в G1.

Задача (Еквивалентност на H и G1)

Да се докаже, че $\Gamma \vdash_{H[mic]} A \iff \Gamma \vdash_{G1[mic]} A$.

Свойства на G1

Задача

Да се докажат всички Хилбертови аксиоми в G1.

Задача (Еквивалентност на H и G1)

Да се докаже, че $\Gamma \vdash_{H[mic]} A \iff \Gamma \vdash_{G1[mic]} A$.

Задача

Да се докаже, че ако $\vdash_{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta$, *то може да се постори доказателство на* $\Gamma \Rightarrow \Delta$, *в което всички аксиоми са атомарни формули, т.е. са от вида* $p\vec{t} \Rightarrow p\vec{t}$.

Примери

Задача

Да се докаже законът за изключеното трето: $\vdash_c A \vee \neg A$.

Примери

Задача

Да се докаже законът за изключеното трето: $\vdash_c A \vee \neg A$.

Задача

Да се докаже законът на Peirce: $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$.

Примери

Задача

Да се докаже законът за изключеното трето: $\vdash_c A \lor \neg A$.

Задача

Да се докаже законът на Peirce: $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$.

Задача

Да се докаже, че: $\vdash_i (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$.

Примери

Задача

Да се докаже законът за изключеното трето: $\vdash_c A \vee \neg A$.

Задача

Да се докаже законът на Peirce: $\vdash_c ((A \to B) \to A) \to A$.

Задача

Да се докаже, че: $\vdash_i (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg(A \to B)$.

Задача

Да се докаже формулата за пияниците: $\vdash_c \exists_x (d\,x \to \forall_x d\,x)$

Примери

Задача

Да се докажат законите на de Morgan в класическа, а където е възможно в минимална логика:

1. $\neg(A \land B) \leftrightarrow \neg A \lor \neg B$
2. $\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$
3. $\neg\forall_x A \leftrightarrow \exists_x \neg A$
4. $\neg\exists_x A \leftrightarrow \forall_x \neg A$

Примери

Задача

Да се докажат законите на de Morgan в класическа, а където е възможно в минимална логика:

1. $\neg(A \land B) \leftrightarrow \neg A \lor \neg B$
2. $\neg(A \lor B) \leftrightarrow \neg A \land \neg B$
3. $\neg\forall_x A \leftrightarrow \exists_x \neg A$
4. $\neg\exists_x A \leftrightarrow \forall_x \neg A$

Задача

1. $\vdash_c (A \to \exists_x B) \to \exists_x (A \to B)$, *ако* $x \notin \mathrm{FV}(A)$.
2. $\vdash_c ((A \to B) \to C) \to (A \to C) \to C$
3. $\vdash_c (A \to B) \lor (B \to A)$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\mathrm{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta} \qquad \mathrm{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$\mathrm{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{RC}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\mathrm{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta} \qquad \mathrm{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$\mathrm{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{RC}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Аксиоми (G2[mi])

$$\mathrm{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A} \qquad \mathrm{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow [C]}\ \text{(само за G2i)}$$

Секвенциално смятане: G2m, G2i, G2c

Можем да слеем правилата за отслабване с аксиомите.

Аксиоми (G2c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A, \Delta} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Структурни правила (G2c)

$$\text{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{RC}\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}$$

Аксиоми (G2[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{\Gamma, A \Rightarrow A} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow [C]}\ \text{(само за G2i)}$$

Структурни правила (G2[mi])

$$\text{LC}\ \frac{A, A, \Gamma \Rightarrow [C]}{A, \Gamma \Rightarrow [C]}$$

Еквивалентност на G1 и G2

Задача

Да се докаже, че ако съществува извод на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *в G2[mic] с дълбочина* n*, то за произволни* Γ' *и* Δ' *съществува извод на* $\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'$ *в G2[mic] с дълбочина* n*.*

Еквивалентност на G1 и G2

Задача

Да се докаже, че ако съществува извод на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *в G2[mic] с дълбочина* n*, то за произволни* Γ' *и* Δ' *съществува извод на* $\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'$ *в G2[mic] с дълбочина* n*.*

Доказателство.

Индукция по n. ☐

Еквивалентност на G1 и G2

Задача

Да се докаже, че ако съществува извод на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *в G2[mic] с дълбочина* n*, то за произволни* Γ' *и* Δ' *съществува извод на* $\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'$ *в G2[mic] с дълбочина* n*.*

Доказателство.

Индукция по n. ☐

Задача

Да се покаже, че $\vdash_{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \vdash_{G2[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Еквивалентност на G1 и G2

Задача

Да се докаже, че ако съществува извод на $\Gamma \Rightarrow \Delta$ *в G2[mic] с дълбочина* n*, то за произволни* Γ' *и* Δ' *съществува извод на* $\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'$ *в G2[mic] с дълбочина* n*.*

Доказателство.

Индукция по n. □

Задача

Да се покаже, че $\vdash_{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \vdash_{G2[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Доказателство.

$(\Leftarrow)$ е тривиална; за $(\Rightarrow)$ елиминираме последователно прилаганията на LW и RW отгоре надолу използвайки предишното твърдение. □

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{\vec{pt}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \vec{pt}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\land\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \land B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\land\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B}$$

$$\text{L}\lor\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\lor\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \lor B}$$

$$\text{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \text{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\mathrm{Ax}\ \frac{}{\vec{pt}, \Gamma \Rightarrow \Delta, \vec{pt}} \qquad \mathrm{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\mathrm{L}\land\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \land B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\land\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \land B}$$

$$\mathrm{L}\lor\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\lor\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \lor B}$$

$$\mathrm{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

$$\mathrm{L}\forall\ \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad \mathrm{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A}\ x \notin \mathrm{FV}(\Gamma\Delta)$$

Секвенциално смятане: G3c

Аксиоми (G3c)

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow \Delta, p\vec{t}} \qquad\qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Логически правила (G3c)

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \vee B}$$

$$\text{L}\to\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \qquad B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \to B}$$

$$\text{L}\forall\ \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow \Delta}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \qquad\qquad \text{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall_x A}\ x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta)$$

$$\text{L}\exists\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow \Delta}\ x \notin \text{FV}(\Gamma\Delta) \qquad\qquad \text{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[x \mapsto t], \exists_x A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists_x A}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \text{(само за G3i)}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \text{(само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \text{(само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \text{(само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\text{L}\to\ \frac{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\to\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ (\text{само за G3i})$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\text{L}{\to}\ \frac{A \to B, \Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \to B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}{\to}\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}$$

$$\text{L}\forall\ \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A}\ x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

Секвенциално смятане: G3m, G3i

Аксиоми (G3[mi])

$$\text{Ax}\ \frac{}{p\vec{t}, \Gamma \Rightarrow p\vec{t}} \qquad \text{L}\bot\ \frac{}{\bot, \Gamma \Rightarrow C}\ \text{(само за G3i)}$$

Логически правила (G3[mi])

$$\text{L}\wedge\ \frac{A, B, \Gamma \Rightarrow C}{A \wedge B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \qquad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}$$

$$\text{L}\vee\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \vee B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\vee\ \frac{\Gamma \Rightarrow A_i}{\Gamma \Rightarrow A_0 \vee A_1}\ (i = 0, 1)$$

$$\text{L}\rightarrow\ \frac{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow A \qquad B, \Gamma \Rightarrow C}{A \rightarrow B, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\rightarrow\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$$

$$\text{L}\forall\ \frac{\forall_x A, A[x \mapsto t], \Gamma \Rightarrow C}{\forall_x A, \Gamma \Rightarrow C} \qquad \text{R}\forall\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow \forall_x A}\ x \notin \text{FV}(\Gamma)$$

$$\text{L}\exists\ \frac{A, \Gamma \Rightarrow C}{\exists_x A, \Gamma \Rightarrow C}\ x \notin \text{FV}(\Gamma, C) \qquad \text{R}\exists\ \frac{\Gamma \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\Gamma \Rightarrow \exists_x A}$$

Свойства на G3

Дефиниция (Обратимо правило)

Правилото $\frac{S_1}{S_2}$ наричаме *обратимо*, ако $\vdash S_1 \iff \vdash S_2$.

Свойства на G3

Дефиниция (Обратимо правило)

Правилото $\dfrac{S_1}{S_2}$ наричаме *обратимо*, ако $\vdash S_1 \iff \vdash S_2$.

Задача (Обратимост в G3)

Да се покаже, че всички правила в G3[mic] са обратими, с изключение на $L\to$ *в G3[mi], за което само десният клон е обратим.*

Свойства на G3

Дефиниция (Обратимо правило)

Правилото $\dfrac{S_1}{S_2}$ наричаме *обратимо*, ако $\vdash S_1 \iff \vdash S_2$.

Задача (Обратимост в G3)

Да се покаже, че всички правила в G3[mic] са обратими, с изключение на $L\to$ в G3[mi], за което само десният клон е обратим.

Задача (Симулация на контракция)

Да се покаже, че LC е изводимо в G3[mic] и RC е изводимо в G3c.

Свойства на G3

Дефиниция (Обратимо правило)

Правилото $\dfrac{S_1}{S_2}$ наричаме *обратимо*, ако $\vdash S_1 \iff \vdash S_2$.

Задача (Обратимост в G3)

Да се покаже, че всички правила в G3[mic] са обратими, с изключение на $L\to$ в G3[mi], за което само десният клон е обратим.

Задача (Симулация на контракция)

Да се покаже, че LC е изводимо в G3[mic] и RC е изводимо в G3c.

Следствие 1

$$\vdash_{G1[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \vdash_{G2[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta \iff \vdash_{G3[mic]} \Gamma \Rightarrow \Delta.$$

Свойство на подформулите

Дефиниция (Подформула)

Дефинираме $A \leq B$ (A е подформула на B) с индукция по A:

- $A \leq A$
- Ако $B \circ C \leq A$, за $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то $B \leq A$ и $C \leq A$
- Ако $Q_x B \leq A$ за $Q \in \{\forall, \exists\}$ и t е произволен терм, то $B[x \mapsto t] \leq A$

Свойство на подформулите

Дефиниция (Подформула)

Дефинираме $A \leq B$ (A е подформула на B) с индукция по A:

- $A \leq A$
- Ако $B \circ C \leq A$, за $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, то $B \leq A$ и $C \leq A$
- Ако $Q_x B \leq A$ за $Q \in \{\forall, \exists\}$ и t е произволен терм, то $B[x \mapsto t] \leq A$

Твърдение 1 (Свойство на подформулите)

Ако имаме доказателство в G[123][mic] на секвента $\Gamma \Rightarrow \Delta$, тогава всяка формула, която се среща в доказателството е подформула на някоя формула от Γ или Δ.

Секвенциално смятане: Cut

Разглеждаме следното допълнително правило:

$$(\mathrm{Cut})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \qquad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}$$

Секвенциално смятане: Cut

Разглеждаме следното допълнително правило:

$$(\text{Cut})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \qquad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}$$

Свойството на подформулите вече не е валидно!

Секвенциално смятане: Cut

Разглеждаме следното допълнително правило:

$$(\mathrm{Cut})\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, C \qquad C, \Gamma' \Rightarrow \Delta'}{\Gamma\Gamma' \Rightarrow \Delta\Delta'}$$

Свойството на подформулите вече не е валидно!

Теорема (Основна теорема на секвенциалното смятане)

Ако $G[123][mic] + Cut \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$, *то* $G[123][mic] \vdash \Gamma \Rightarrow \Delta$.

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”
- Някои правила за построяване на дървото изискват да се задраскат всички срещания на свободните листа с даден етикет

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”
- Някои правила за построяване на дървото изискват да се задраскат всички срещания на свободните листа с даден етикет
- Ако $\mathcal{D}$ е доказателствено дърво, с $FA(\mathcal{D})$ означаваме множеството на свободните му листа

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”
- Някои правила за построяване на дървото изискват да се задраскат всички срещания на свободните листа с даден етикет
- Ако $\mathcal{D}$ е доказателствено дърво, с $FA(\mathcal{D})$ означаваме множеството на свободните му листа
- Ако можем да построим дърво $\mathcal{D}$ с корен A и Γ е множество от формули такова, че $\mathrm{FV}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$, то отбелязваме $\Gamma \vdash_{N[mic]} A$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

- Доказателствата са дървета, чиито листа са формули, означени с етикети
- Всеки етикет може да се слага много пъти, но само на една и съща формула
- Коренът на дървото е заключението на доказателството, а листата са използваните допускания
- Всяко листо е в точно едно от две състояния: “свободно” и “задраскано”
- Някои правила за построяване на дървото изискват да се задраскат всички срещания на свободните листа с даден етикет
- Ако $\mathcal{D}$ е доказателствено дърво, с $FA(\mathcal{D})$ означаваме множеството на свободните му листа
- Ако можем да построим дърво $\mathcal{D}$ с корен A и Γ е множество от формули такова, че $\mathrm{FV}(\mathcal{D}) \subseteq \Gamma$, то отбелязваме $\Gamma \vdash_{N[mic]} A$
- $\vdash A$ означава, че сме доказали A, задрасквайки всички листа

Правила за извод в N[mic]

Правилата за естествен извод са два вида: за въвеждане ($\circ^+$) и елиминиране ($\circ^-$), по едно за всеки логически символ $\circ$.

Правила за извод в N[mic]

Правилата за естествен извод са два вида: за въвеждане ($\circ^+$) и елиминиране ($\circ^-$), по едно за всеки логически символ $\circ$.

$$\to^+ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A \to B}\,u \qquad\qquad \to^- \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A \to B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}$$

Правила за извод в N[mic]

Правилата за естествен извод са два вида: за въвеждане ($\circ^+$) и елиминиране ($\circ^-$), по едно за всеки логически символ $\circ$.

$$\rightarrow^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A\rightarrow B}\,u \qquad\qquad \rightarrow^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\rightarrow B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}$$

$$\wedge^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ B\end{array}}{A\wedge B} \qquad\qquad \wedge^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A_0\wedge A_1\end{array}}{A_i}\,(i=0,1)$$

Правила за извод в N[mic]

Правилата за естествен извод са два вида: за въвеждане ($\circ^{+}$) и елиминиране ($\circ^{-}$), по едно за всеки логически символ $\circ$.

$$\rightarrow^{+}\ \begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ \dfrac{B}{A\rightarrow B}\ u\end{array}
\qquad\qquad
\rightarrow^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\rightarrow B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}$$

$$\wedge^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ B\end{array}}{A\wedge B}
\qquad\qquad
\wedge^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A_0\wedge A_1\end{array}}{A_i}\ (i=0,1)$$

$$\vee^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A_i\end{array}}{A_0\vee A_1}\ (i=0,1)
\qquad\qquad
\vee^{-}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid \mathcal{P}\\ A\vee B\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ C\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{[B^v]}\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\ u,v$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \; \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall_x A} \; x \notin FV[FA(M)] \qquad\qquad \forall^- \; \frac{\begin{array}{c} \mid M \\ \forall_x A \end{array} \qquad t}{A[x \mapsto t]}$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array}}{\forall_x A} \ x \notin FV[FA(M)] \qquad\qquad \forall^- \ \dfrac{\begin{array}{cc} \mid M & \\ \forall_x A & t \end{array}}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \ \dfrac{\begin{array}{cc} & \mid M \\ t & A[x \mapsto t] \end{array}}{\exists_x A} \qquad\qquad \exists^- \ \dfrac{\begin{array}{cc} & \cancel{[A^u]} \\ \mid M & \mid N \\ \exists_x A & C \end{array}}{C} \, u \qquad \begin{array}{l} x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(N \setminus \{A^u\})] \\ x \notin \mathrm{FV}(C) \end{array}$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+ \; \frac{\overset{\mid\, M}{A}}{\forall_x A} \; x \notin FV[FA(M)] \qquad\qquad \forall^- \; \frac{\overset{\mid\, M}{\forall_x A} \qquad\quad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+ \; \frac{t \qquad\quad \overset{\mid\, M}{A[x \mapsto t]}}{\exists_x A} \qquad\qquad \exists^- \; \frac{\overset{\mid\, M}{\exists_x A} \qquad\quad \overset{\overset{\cancel{[A^u]}}{\mid\, N}}{C}}{C}\, u \qquad \begin{array}{l} x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(N \setminus \{A^u\})] \\ x \notin \mathrm{FV}(C) \end{array}$$

$$\mathrm{Efq} \; \frac{\overset{\mid\, M}{\bot}}{A} \; \text{(само за Ni)}$$

Системи за естествен извод: Nm, Ni, Nc

$$\forall^+\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{\forall_x A}\ x \notin FV[FA(M)] \qquad\qquad \forall^-\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ \forall_x A\end{array}\qquad t}{A[x \mapsto t]}$$

$$\exists^+\ \dfrac{t \qquad \begin{array}{c}\mid M\\ A[x \mapsto t]\end{array}}{\exists_x A} \qquad\qquad \exists^-\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ \exists_x A\end{array}\qquad \begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\ u \qquad \begin{array}{l}x \notin \mathrm{FV}[\mathrm{FA}(N \setminus \{A^u\})]\\ x \notin \mathrm{FV}(C)\end{array}$$

$$\mathrm{Efq}\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ \bot\end{array}}{A}\ \text{(само за Ni)} \qquad\qquad \mathrm{Stab}\ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[\neg A^u]}\\ \mid M\\ \bot\end{array}}{A}\ u\ \text{(само за Nc)}$$