Тема: комбинаторика, графи

Име: .... ФN: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
от максимално	25	25	25	25	100

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно. Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно. Идентичните решения ще бъдат анулирани.

Задача 1. Нека $G = (V, E)$ е граф. За целите на тази задача дефинираме $t(G)$ като графа, чиито върхове са ребрата на G, а два върха на $t(G)$ са съседни тогава и само тогава, когато в G тези две ребра имат общ връх.

5 т. **а)** Нарисувайте $t(K_4)$.

5 т. **б)** Дайте пример за граф H, такъв че H и $t(H)$ са изоморфни.

15 т. **в)** Докажете, че ако G е Хамилтонов, то и $t(G)$ е Хамилтонов.

Задача 2. Разглеждаме множеството $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 8\}$ от точки с целочислени координати в равнината. Всяка от тези точки е оцветена в точно един от два дадени цвята. Да се докаже, че съществуват четири едноцветни точки в M, които са върхове на правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Задача 3. Нека са дадени две безкрайни редици от цели числа

$$\mathcal{X} = x_1, x_2, \ldots$$
$$\mathcal{Y} = y_1, y_2, \ldots$$

дефинирани по следния начин:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

20 т. **а)** Да се изрази в явен вид редицата $\mathcal{X}$. Иска се да се намери формула за общия ѝ член x_n, която не съдържа нито x_i, нито y_i, за никое i.

5 т. **б)** Да се докаже, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : x_n - \sqrt{3}y_n = (2 - \sqrt{3})^n$.

Упътване: забележете, че и $\mathcal{X}$, и $\mathcal{Y}$ са редици от ***цели*** *числа. Ако това не беше дадено, уравнението $x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$ нямаше да дефинира двете редици еднозначно. Но изискването x_n и y_n да са цели числа налага еднозначно решение. Първо съставете система от две рекурентни уравнения, която изразява x_n и y_n чрез изрази, които съдържат x_i и y_j, където $i, j < n$. От тези две рекурентни уравнения (за такива рекурентни уравнения казваме, че са* взаимно рекурсивни*) изведете рекурентно уравнение за x_n, което не съдържа взаимна рекурсия; тоест, в дясната страна не се среща y_j, за никое j. Решете това уравнение.*

Задача 4. Да се докаже, че в произволно дърво с поне два върха, броят на върховете от степен, по-малка от 3, е поне с 2 по-голям от броят на върховете от степен поне 3.