Тема: комбинаторика, графи

Име: .... ФN°: .... Група: ....

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
от максимално	25	25	25	25	100

Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно. Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно. Идентичните решения ще бъдат анулирани.

Задача 1. Нека $G = (V, E)$ е граф. За целите на тази задача дефинираме $t(G)$ като графа, чиито върхове са ребрата на G, а два върха на $t(G)$ са съседни тогава и само тогава, когато в G тези две ребра имат общ връх.

5 т. **а)** Нарисувайте $t(K_4)$.

5 т. **б)** Дайте пример за граф H, такъв че H и $t(H)$ са изоморфни.

15 т. **в)** Докажете, че ако G е Хамилтонов, то и $t(G)$ е Хамилтонов.

Задача 2. Разглеждаме множеството $M = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 8\}$ от точки с целочислени координати в равнината. Всяка от тези точки е оцветена в точно един от два дадени цвята. Да се докаже, че съществуват четири едноцветни точки в M, които са върхове на правоъгълник със страни, успоредни на координатните оси.

Задача 3. Нека са дадени две безкрайни редици от цели числа

$$\mathcal{X} = x_1, x_2, \ldots$$
$$\mathcal{Y} = y_1, y_2, \ldots$$

дефинирани по следния начин:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$$

20 т. **а)** Да се изрази в явен вид редицата $\mathcal{X}$. Иска се да се намери формула за общия ѝ член x_n, която не съдържа нито x_i, нито y_i, за никое i.

5 т. **б)** Да се докаже, че $\forall n \in \mathbb{N}^+ : x_n - \sqrt{3}y_n = (2 - \sqrt{3})^n$.

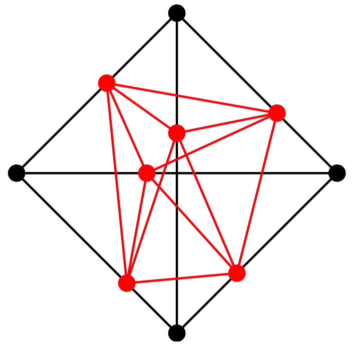
*Упътване: забележете, че и $\mathcal{X}$, и $\mathcal{Y}$ са редици от **цели** числа. Ако това не беше дадено, уравнението $x_n + \sqrt{3}y_n = (2 + \sqrt{3})^n$ нямаше да дефинира двете редици еднозначно. Но изискването x_n и y_n да са цели числа налага еднозначно решение. Първо съставете система от две рекурентни уравнения, която изразява x_n и y_n чрез изрази, които съдържат x_i и y_j, където $i, j < n$. От тези две рекурентни уравнения (за такива рекурентни уравнения казваме, че са* взаимно рекурсивни*) изведете рекурентно уравнение за x_n, което не съдържа взаимна рекурсия; тоест, в дясната страна не се среща y_j, за никое j. Решете това уравнение.*

Задача 4. Да се докаже, че в произволно дърво с поне два върха, броят на върховете от степен, по-малка от 3, е поне с 2 по-голям от броят на върховете от степен поне 3.

Примерни решения

Задача 1., решение. По отношение на даден граф G, така дефинираният $t(G)$ е прието да се нарича на английски *the line graph of* G и е прието да се означава с $L(G)$.

а) Ето K_4 в черно с анонимни върхове и $L(K_4)$ в червено върху същата рисунка.



б) Всеки цикъл може да служи за пример. Да кажем, K_3.

в) Нека $G = (V, E)$. Нека $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ и $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Нека G има Хамилтонов цикъл, който, без ограничение на общността, означаваме с

$$c = v_1 e_1 v_2 e_2 \cdots v_{n-1} e_{n-1} v_n e_n v_1$$

Забележете, че цикълът $c' = e_1 e_2 \cdots e_n e_1$ (това са само имената на върховете му) в $L(G)$ не е непременно Хамилтонов, защото G може да има още ребра, а именно $e_{n+1}, \ldots, e_m$, които са върхове в $L(G)$ и трябва да са във всеки Хамилтонов цикъл в $L(G)$.

Конструираме Хамилтонов цикъл в $L(G)$ по следния начин. Започваме с c' и го разширяваме, докато не стане Хамилтонов. За всяко ребро e_j от G, което не е от c (такова ребро се нарича *хорда на* c), избираме точно единия му край, да кажем връх v_k. В цикъла c, v_k е "ограден" от две ребра, да ги наречем e' и e''. В цикъла c' вмъкваме e_j между e' и e''. Ако няколко ребра от G са хорди на c с общ край върха v_k и за всяко от тях сме избрали върха v_k, то вмъкваме всички тях в c' между e' и e'' в произволен ред. Очевидно тази конструкция ще добави всички хорди на c към цикъла c'; очевидно при тези вмъквания c' остава цикъл. Тогава c' е Хамилтонов цикъл в $L(G)$.

Задача 2, решение. Нека цветовете са 0 и 1. Тогава възможните оцветявания на един ред са подмножество на $\{0,1\}^3$. Имаме $|\{0,1\}^3| = 8$ възможности за оцветяване на един ред и 9 реда за оцветяване. Съгласно принципа на Дирихле, поне два реда ще са оцветени по един и същи начин.

От друга страна, във всеки ред има поне две точки в един и същи цвят. Следователно, има два реда, които съдържат двойки едноцветни точки в едни и същи колони. Това означава, че има четири различни точки в един и същи цвят, които са върхове на правоъгълник.

Задача 3, решение. **а)** Дадено е

$$x_n + \sqrt{3} y_n = (2 + \sqrt{3})^n \tag{1}$$

Тогава

$$x_{n+1} + \sqrt{3} y_{n+1} = (2 + \sqrt{3})^{n+1}$$

Но

$$(2 + \sqrt{3})^{n+1} = (2 + \sqrt{3})^n (2 + \sqrt{3}) = (x_n + \sqrt{3} y_n)(2 + \sqrt{3}) = 2x_n + \sqrt{3} x_n + 2\sqrt{3} y_n + 3y_n$$

Ключово за решението е в последния израз да групираме четирите събираеми в две групи не с изваждане на x_n и y_n пред скоби, а с изваждане на радикала пред скоби:

$$2x_n + \sqrt{3} x_n + 2\sqrt{3} y_n + 3y_n = 1(2x_n + 3y_n) + \sqrt{3}(x_n + 2y_n)$$

Изведохме

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1x_{n+1} + \sqrt{3} y_{n+1} = 1(2x_n + 3y_n) + \sqrt{3}(x_n + 2y_n)$$

Но x_n, y_n, x_{n+1} и y_{n+1} са цели числа, а $\sqrt{3}$ е ирационално число. За да има равенство, необходимо е следните две уравнения да са в сила:

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \tag{2}$$
$$y_{n+1} = x_n + 2y_n \tag{3}$$

Тъй като се търси x_n, а не y_n, ще направим уравнение, в което няма да се среща y. Да изразим y_n от (2) само чрез x-ове:

$$y_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n}{3} \tag{4}$$

Тъй като в (3) y се среща както с индекс n, така и с индекс $n+1$, налага се да изразим и y_{n+1} само чрез x-ове. Заместваме n с $n+1$ в (4) и получаваме

$$y_{n+1} = \frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{3} \tag{5}$$

Да заместим y_{n+1} и y_n в (3) с десните страни съответно на (4) и (5):

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1}}{3} = x_n + \frac{2(x_{n+1} - 2x_n)}{3} \leftrightarrow x_{n+2} - 2x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n+1} - 4x_n \leftrightarrow$$
$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n \tag{6}$$

Може да препишем (6) така:

$$x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2} \tag{7}$$

Да видим какви са началните условия. Връщаме се към (1). Ако заместим n с 1 и 2, получаваме

$$x_1 + \sqrt{3}y_1 = 2 + \sqrt{3} \rightarrow x_1 = 2$$
$$x_2 + \sqrt{3}y_2 = 7 + 4\sqrt{3} \rightarrow x_2 = 7$$

Окончателно, рекурентното уравнение за x е

$$x_n = \begin{cases} 2, & \text{ако } n = 1 \\ 7, & \text{ако } n = 2 \\ 4x_{n-1} - x_{n-2}, & \text{ако } n > 2 \end{cases}$$

Решението е

$$x_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \tag{8}$$

б) Събирайки лявата и дясната страна на (8) с $\sqrt{3}y_n$, получаваме

$$x_n + \sqrt{3}y_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \sqrt{3}y_n \tag{9}$$

От друга страна, от (1) знаем, че

$$x_n + \sqrt{3}y_n = (2+\sqrt{3})^n \tag{10}$$

От (9) и (10) имаме

$$\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n + \sqrt{3}y_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n \leftrightarrow$$
$$-\sqrt{3}y_n = -\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \leftrightarrow$$
$$x_n - \sqrt{3}y_n = x_n - \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \leftrightarrow$$
$$x_n - \sqrt{3}y_n = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n - \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)^n \leftrightarrow$$
$$x_n - \sqrt{3}y_n = \left(2-\sqrt{3}\right)^n$$

Задача 4, решение. Нека $T = (V, E)$ е произволно дърво с поне два върха. Знаем, че $m = n - 1$, понеже T е дърво. Знаем, че $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Тогава

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2n - 2$$

Нека x е броят на върховете от степен, по-малка от 3, а y, на тези от степен поне 3. Очевидно $x + y = n$. От друга страна,

$$\sum_{v \in V} d(v) \geqslant x + 3y$$

понеже няма изолирани върхове. Тогава

$$x + 3y \leqslant 2n - 2 = 2(x + y) - 2 = 2x + 2y - 2 \;\to\; x \geqslant y + 2$$