ПРОЕКТ ПО ИЗБИРАЕМАТА УЧЕБНА ДИСЦИПЛИНА
"АЛГОРИТМИ ЗА КОМБИНАТОРНИ И ОПТИМИЗАЦИОННИ ЗАДАЧИ"
(СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2018 / 2019 УЧ. Г.)

Студент: Костадин Светлинов Гаров, факултетен номер 81721.

Тема: Брой разбивания на таблица на пътеки.

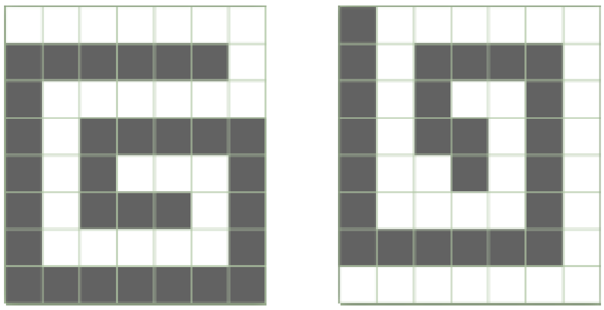
Описание на проекта: търсим броя на оцветяванията с два цвята на таблица с дадени размери така, че клетките от всеки цвят да образуват свързана, несамодопираща се и несамопресичаща се пътека (не цикъл).

Условие: Дадена е правоъгълна таблица с N реда и M стълба, като всяка клетка е оцветена в бяло или черно. Две клетки са съседни, ако имат обща страна. Оцветяването е правилно, ако черните клетки образуват пътека и белите клетки образуват пътека. Пътека наричаме множество S от клетки със следните свойства:

— Клетките образуват свързана компонента: от всяка клетка на S можем да стигнем до всяка друга клетка на S чрез преходи между съседни клетки.

— Точно две клетки от S имат точно един съсед от S — те са краищата на пътеката. Всяка друга клетка от S има точно два съседа от S.

На картинката оцветяването отляво е правилно, а оцветяването отдясно е неправилно: белите клетки не образуват пътека.



По дадени числа N и M програмата намира броя на правилните оцветявания на таблица $N \times M$. Оцветяванията, получени едно от друго чрез завъртане и отражение, се смятат за различни.

Решение:

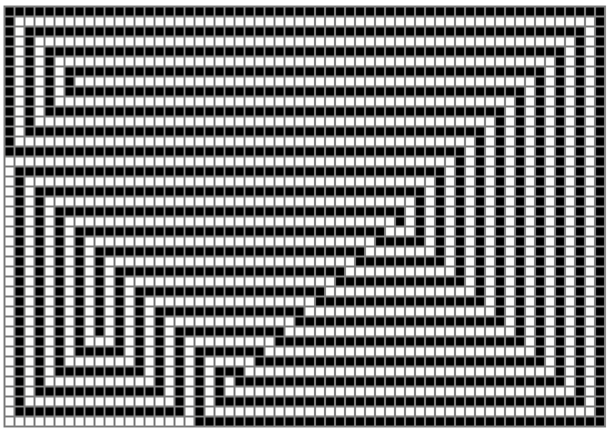
Степен на клетка наричаме броя на нейните съседи, които са оцветени с нейния цвят. За всяко правилно оцветяване има точно четири клетки от степен 1 — краищата на бялата и черната пътека. Останалите клетки са от степен 2.

Веднъж определили краищата на пътеките, можем да възстановим цялото оцветяване чрез търсене с груба сила. Оцветяването на първия ред определя оцветяването на цялата таблица: като знаем степента и цвета на коя да е клетка и цветовете на горния, десния и левия ѝ съсед, можем еднозначно да определим цвета на съседа отдолу.

Има 2^M начина да оцветим първия ред, $\begin{pmatrix} NM \\ 4 \end{pmatrix}$ начина да изберем краищата на пътеките и $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ начина да изберем цветовете на краищата. Затова времевата сложност на наивния алгоритъм е $\Theta(2^M (NM)^4)$.

Можем да намалим $\Theta(2^M)$ до $\Theta((N+M)^2)$, като вместо произволно оцветяване на първия ред изберем произволно, но допустимо оцветяване на рамката на таблицата. Допустими са тези оцветявания на рамката, при които, ако я обикаляме в една посока, например по часовника, цветът на текущата клетка се променя точно два пъти. Иначе клетките от единия цвят, взети от цялата таблица (рамката и вътрешността), биха образували несвързана фигура, а не пътека.

Ако пуснем диагонали под ъгъл $45°$ от краищата на пътеките вътре в таблицата, ще стигнем до ъгъл на таблицата или до място от рамката, където се срещат два цвята. Можем обратно да получим краищата на пътеките във вътрешността на таблицата, като изпробваме всички възможни пресечни точки на диагоналите, тръгващи от ъглите на таблицата и от местата по рамката, където се срещат два цвята.



Има осем диагонала — по четири във всяко направление. Пресечните им точки са най-много 16. След като оцветим таблицата, можем да проверим за време $\Theta(NM)$ дали сме получили решение. Така намираме всички решения за време $\Theta(NM(N+M)^2)$.

1. Оцветяваме рамката, като избираме двете места, където цветът се променя.

2. Избираме краищата на пътеките; с това задаваме степените на всички клетки.

3. Оцветяваме таблицата и проверяваме дали се получава решение.

Проверяваме дали се получава решение, като обходим пътеките от крайните им точки и сравним общия брой на клетките им с броя NM на всички клетки в таблицата. Сравнението е нужно, за да избегнем възможността за наличието на цикли, несвързани с пътеките.