

Влагане на класическа в минимална логика

Трифон Трифонов

λ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

28 май 2019 г.

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \rightarrow \neg B \rightarrow \perp$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \rightarrow B \rightarrow \perp)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg \forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \tilde{\vee} \dots \tilde{\vee} A_n := \neg A_1 \rightarrow \dots \rightarrow \neg A_n \rightarrow \perp$
- за удобство $A_1 \tilde{\wedge} \dots \tilde{\wedge} A_n := \neg(A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow \perp)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \tilde{\wedge} \dots \tilde{\wedge} A_n := \neg \forall_{\vec{x}} (A_1 \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow \perp)$

Лема 1

- $A \vee B \begin{matrix} \xleftarrow{m} \\ \xrightarrow{c} \end{matrix} A \tilde{\vee} B$
- $A \wedge B \begin{matrix} \xleftarrow{m} \\ \xrightarrow{c} \end{matrix} A \tilde{\wedge} B$
- $\exists_x A \begin{matrix} \xleftarrow{m} \\ \xrightarrow{c} \end{matrix} \tilde{\exists}_x A$

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
 - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
 - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
 - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab (\perp_c)
 - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
 - има твърдения, които могат да се докажат без Stab (\perp_m)
- общи аксиоми и правила
 - езикът на минималната логика е разширен със силни символи
 - езикът на класическата логика е ограничен до слаби символи
 - има твърдения, които могат да се докажат само, ако са изразени със слаби логически символи
 - всяко доказателство на формула със силни логически символи може да се преведе до слаби логически символи
 - има твърдения, които могат да се докажат със силни логически символи

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\rightarrow \wedge \vee \exists)$ разширява $Nm(\rightarrow \forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\rightarrow \forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**
 - 1 дефинираме изображение от $Nc(\rightarrow \wedge \vee \exists)$ в $Nm(\rightarrow \forall)$
 - 2 доказваме образа на $Stab$ в $Nm(\rightarrow \forall)$
 - 3 доказваме, че изображението запазва изводимостта в Nm
 - 4 доказваме, че обратното изображение възстановява изводимостта в Nc

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\rightarrow \wedge \vee \forall \exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\rightarrow \forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \bar{p}\vec{t}$ (\bar{p} е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \rightarrow B)_g := A_g \rightarrow B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \tilde{\wedge} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \tilde{\vee} B_g$
- $(\forall_x A)_g := \forall_x A_g$
- $(\exists_x A)_g := \tilde{\exists}_x A_g$

Дефинираме $C^g := C_g[\bar{\perp} \mapsto \perp][\bar{p}\vec{t} \mapsto \neg\neg p\vec{t}]$.

Дефиниция

- $e_p : \forall_{\vec{x}}(\perp \rightarrow p\vec{x})$
- $s_p : \forall_{\vec{x}}(\neg\neg p\vec{x} \rightarrow p\vec{x})$

Стъпка 2: доказваме образа на Stab

Лема 2

$$\{s_p\}_{\perp \neq p \in A} \mid \frac{\rightarrow \forall}{m} \neg \neg A \rightarrow A$$

Лема 3

$$\textcircled{1} \mid \frac{}{m} A \rightarrow \neg \neg A$$

$$\textcircled{2} \mid \frac{}{m} \neg \neg \neg A \rightarrow \neg A$$

Лема 4

$$\mid \frac{\rightarrow \forall}{m} \neg \neg A^g \rightarrow A^g$$

Доказателство.

Използваме Лема 2 за A_g , замествайки $\bar{p}\vec{t}$ с $\neg \neg p\vec{t}$ и $s_{\bar{p}}$ с доказателствата от Лема 3.2 за $A := \neg p\vec{x}$. □

Efq и Stab като теореми

Задача

$$\{e_p\}_{\perp \neq p \in A} \mid_m \perp \rightarrow A$$

Задача

$$\text{HA}^\omega \mid_m F \rightarrow A$$

Задача

$$\text{HA}^\omega \mid_m^{\rightarrow \forall} ((A \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow A$$

Стъпка 3: запазване на изводимостта след \cdot^g

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\forall}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Лема 5

- $\frac{\rightarrow^{\forall}}{m} \tilde{\forall}_{0,1}^+, \tilde{\wedge}^+, \tilde{\exists}^+$
- $\frac{}{c} \tilde{\forall}^-, \tilde{\wedge}^-, \tilde{\exists}^-$

Теорема

Ако $\Gamma \frac{}{c} A$, то $\Gamma^g \frac{\rightarrow^{\forall}}{m} A^g$.

Доказателство.

- за *Stab* използваме Лема 4
- $\rightarrow^{\pm}, \forall^{\pm}$ се превеждат без промяна
- $\forall^{\pm}, \wedge^{\pm}, \exists^{\pm}$ се превеждат съгласно Лема 5, като използванията на *Stab* се заместват с доказателства съгласно Лема 4 □

Стъпка 4: възстановяване на изводимостта преди \cdot^g

Лема 6

$$\frac{}{c} A \leftrightarrow A^g$$

Доказателство.

Индукция по A с използване на Лема 1 и Лема 3. □

Теорема

Ако $\Gamma^g \frac{\rightarrow \forall}{m} A^g$, то $\Gamma \frac{}{c} A$.

Доказателство.

В извода на A^g заместваме допусканията в Γ^g с доказателства с допускания от Γ съгласно правата посока на Лема 6 и прилагаме над обратната посока на Лема 6 за да получим извод на A . □