Влагане на класическа в минимална логика

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

28 май 2019 г.

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \mathbin{\tilde{\vee}} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \mathbin{\tilde{\vee}} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \mathbin{\tilde{\wedge}} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x\neg A$ (слабо съществуване)

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \mathbin{\tilde{\vee}} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \mathbin{\tilde{\wedge}} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \mathbin{\tilde{\vee}} \ldots \mathbin{\tilde{\vee}} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \mathbin{\tilde{\vee}} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \mathbin{\tilde{\wedge}} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg \forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \mathbin{\tilde{\vee}} \ldots \mathbin{\tilde{\vee}} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \mathbin{\tilde{\wedge}} \ldots \mathbin{\tilde{\wedge}} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg\forall_{\vec{x}}(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \mathbin{\tilde{\vee}} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \mathbin{\tilde{\wedge}} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \mathbin{\tilde{\vee}} \ldots \mathbin{\tilde{\vee}} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \mathbin{\tilde{\wedge}} \ldots \mathbin{\tilde{\wedge}} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \mathbin{\tilde{\wedge}} \ldots \mathbin{\tilde{\wedge}} A_n := \neg\forall_{\vec{x}}(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Лема 1

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg\forall_{\vec{x}}(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Лема 1

- $A \vee B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\vee} B$

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg\forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg\forall_{\vec{x}}(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Лема 1

- $A \vee B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\vee} B$
- $A \wedge B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\wedge} B$

Слаби логически символи

В класическата логика съществува дуалност между логическите символи, която позволяват едни символи да се дефинират чрез други.

- $A \tilde{\vee} B := \neg A \to \neg B \to \bot$ (слаба дизюнкция)
- $A \tilde{\wedge} B := \neg(A \to B \to \bot)$ (слаба конюнкция)
- $\tilde{\exists}_x A := \neg \forall_x \neg A$ (слабо съществуване)
- за удобство $A_1 \tilde{\vee} \ldots \tilde{\vee} A_n := \neg A_1 \to \ldots \to \neg A_n \to \bot$
- за удобство $A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$
- за удобство $\tilde{\exists}_{\vec{x}} A_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} A_n := \neg \forall_{\vec{x}}(A_1 \to \ldots \to A_n \to \bot)$

Лема 1

- $A \vee B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\vee} B$
- $A \wedge B \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} A \tilde{\wedge} B$
- $\exists_x A \underset{c}{\overset{m}{\rightleftarrows}} \tilde{\exists}_x A$

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила
  - езикът на минималната логика е разширен със силни символи

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила
  - езикът на минималната логика е разширен със силни символи
  - езикът на класическата логика е ограничен до слаби символи

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила
  - езикът на минималната логика е разширен със силни символи
  - езикът на класическата логика е ограничен до слаби символи
  - има твърдения, които могат да се докажат само, ако са изразени със слаби логически символи

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила
  - езикът на минималната логика е разширен със силни символи
  - езикът на класическата логика е ограничен до слаби символи
  - има твърдения, които могат да се докажат само, ако са изразени със слаби логически символи
  - всяко доказателство на формула със силни логически символи може да се преведе до слаби логически символи

Минимална и класическа логика

Две различни перспективи:

- общ език за изразяване
  - класическата логика има неконструктивна аксиома (Stab)
  - класическата логика доказва повече твърдения от минималната
  - има твърдения, които не могат да се докажат без Stab ($\vdash_c$)
  - във всяко доказателство без Stab може да се добави Stab
  - има твърдения, които могат да се докажат без Stab ($\vdash_m$)
- общи аксиоми и правила
  - езикът на минималната логика е разширен със силни символи
  - езикът на класическата логика е ограничен до слаби символи
  - има твърдения, които могат да се докажат само, ако са изразени със слаби логически символи
  - всяко доказателство на формула със силни логически символи може да се преведе до слаби логически символи
  - има твърдения, които могат да се докажат със силни логически символи

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна *Nc* разширява *Nm*
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\land\lor\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**
  1. дефинираме изображение от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ в $Nm(\to\forall)$

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**
  1. дефинираме изображение от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ в $Nm(\to\forall)$
  2. доказваме образа на $Stab$ в $Nm(\to\forall)$

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**
  1. дефинираме изображение от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ в $Nm(\to\forall)$
  2. доказваме образа на $Stab$ в $Nm(\to\forall)$
  3. доказваме, че изображението запазва изводимостта в Nm

Влагане на класическа в минимална логика

- от една страна Nc разширява Nm
- от друга страна $Nm = Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$ разширява $Nm(\to\forall)$
- **Цел:** Nc е изоморфна на $Nm(\to\forall)$
- с други думи: Nc се влага изоморфно в Nm
- **Основна идея (Gödel, Gentzen):** заменяме силни със слаби логически символи
- **План:**
  1. дефинираме изображение от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ в $Nm(\to\forall)$
  2. доказваме образа на $Stab$ в $Nm(\to\forall)$
  3. доказваме, че изображението запазва изводимостта в Nm
  4. доказваме, че обратното изображение възстановява изводимостта в Nc

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \,\tilde{\wedge}\, B_g$

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \mathrel{\tilde{\wedge}} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \mathrel{\tilde{\vee}} B_g$

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\wedge}} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\vee}} B_g$
- $(\forall_x A)_g := \forall_x A_g$

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\wedge}} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\vee}} B_g$
- $(\forall_x A)_g := \forall_x A_g$
- $(\exists_x A)_g := \tilde{\exists}_x A_g$

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\wedge}} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\vee}} B_g$
- $(\forall_x A)_g := \forall_x A_g$
- $(\exists_x A)_g := \tilde{\exists}_x A_g$

Дефинираме $C^g := C_g[\overline{\bot} \mapsto \bot][\overline{p}\vec{t} \mapsto \neg\neg p\vec{t}]$.

Стъпка 1: трансформация на Gödel-Gentzen

Дефиниция

На формула C от $Nc(\to\wedge\vee\forall\exists)$ съпоставяме формула C_g в $Nm(\to\forall)$:

- $(p\vec{t})_g := \overline{p}\vec{t}$ ($\overline{p}$ е свеж предикатен символ, съответстващ на p)
- $(A \to B)_g := A_g \to B_g$
- $(A \wedge B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\wedge}} B_g$
- $(A \vee B)_g := A_g \mathbin{\tilde{\vee}} B_g$
- $(\forall_x A)_g := \forall_x A_g$
- $(\exists_x A)_g := \tilde{\exists}_x A_g$

Дефинираме $C^g := C_g[\overline{\bot} \mapsto \bot][\overline{p}\vec{t} \mapsto \neg\neg p\vec{t}]$.

Дефиниция

- $e_p : \forall_{\vec{x}}(\bot \to p\vec{x})$
- $s_p : \forall_{\vec{x}}(\neg\neg p\vec{x} \to p\vec{x})$

Стъпка 2: доказваме образа на Stab

Лема 2

$$\{s_p\}_{\perp \neq p \in A} \vdash^{\to\forall}_{m} \neg\neg A \to A$$

Стъпка 2: доказваме образа на Stab

Лема 2

$$\{s_p\}_{\bot \neq p \in A} \vdash_m^{\to\forall} \neg\neg A \to A$$

Лема 3

1. $\vdash_m A \to \neg\neg A$
2. $\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$

Стъпка 2: доказваме образа на Stab

Лема 2

$$\{s_p\}_{\bot \neq p \in A} \mathrel{\left|\frac{\;\to\forall\;}{m}\right.} \neg\neg A \to A$$

Лема 3

1. $\vdash_m A \to \neg\neg A$
2. $\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$

Лема 4

$$\mathrel{\left|\frac{\;\to\forall\;}{m}\right.} \neg\neg A^g \to A^g$$

Стъпка 2: доказваме образа на Stab

Лема 2

$\{s_p\}_{\bot \neq p \in A} \vdash_m^{\to\forall} \neg\neg A \to A$

Лема 3

1. $\vdash_m A \to \neg\neg A$
2. $\vdash_m \neg\neg\neg A \to \neg A$

Лема 4

$\vdash_m^{\to\forall} \neg\neg A^g \to A^g$

Доказателство.

Използваме Лема 2 за A_g, замествайки $\overline{p}\vec{t}$ с $\neg\neg p\vec{t}$ и $s_{\overline{p}}$ с доказателствата от Лема 3.2 за $A := \neg p\vec{x}$. □

Efq и Stab като теореми

Задача

$\{e_p\}_{\perp \neq p \in A} \vdash_m \perp \to A$

Efq и Stab като теореми

Задача

$\{e_p\}_{\bot \neq p \in A} \vdash_m \bot \to A$

Задача

$\mathrm{HA}^\omega \vdash_m F \to A$

Efq и Stab като теореми

Задача

$\{e_p\}_{\perp \neq p \in A} \vdash_m \perp \to A$

Задача

$\mathrm{HA}^\omega \vdash_m F \to A$

Задача

$\mathrm{HA}^\omega \vdash_m^{\to\forall} ((A \to F) \to F) \to A$

Стъпка 3: запазване на изводимостта след $\cdot^g$

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Стъпка 3: запазване на изводимостта след $\cdot^g$

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Лема 5

- $\vdash_m^{\to\forall} \tilde{\vee}^+_{0,1}, \tilde{\wedge}^+, \tilde{\exists}^+$
- $\vdash_c \tilde{\vee}^-, \tilde{\wedge}^-, \tilde{\exists}^-$

Стъпка 3: запазване на изводимостта след $\cdot^g$

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Лема 5

- $\vdash_m^{\to\forall} \tilde{\vee}_{0,1}^+, \tilde{\wedge}^+, \tilde{\exists}^+$
- $\vdash_c \tilde{\vee}^-, \tilde{\wedge}^-, \tilde{\exists}^-$

Теорема

Ако $\Gamma \vdash_c A$, то $\Gamma^g \vdash_m^{\to\forall} A^g$.

Доказателство.

- за *Stab* използваме Лема 4

□

Стъпка 3: запазване на изводимостта след $\cdot^g$

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Лема 5

- $\vdash^{\rightarrow\forall}_{m} \tilde{\vee}^+_{0,1}, \tilde{\wedge}^+, \tilde{\exists}^+$
- $\vdash_{c} \tilde{\vee}^-, \tilde{\wedge}^-, \tilde{\exists}^-$

Теорема

Ако $\Gamma \vdash_{c} A$, *то* $\Gamma^g \vdash^{\rightarrow\forall}_{m} A^g$.

Доказателство.

- за *Stab* използваме Лема 4
- $\rightarrow^{\pm}, \forall^{\pm}$ се превеждат без промяна

$\square$

Стъпка 3: запазване на изводимостта след $\cdot^g$

Можем да дефинираме еквиваленти на правилата за извод за $\tilde{\vee}, \tilde{\wedge}, \tilde{\exists}$.

Лема 5

- $\vdash_m^{\to\forall} \tilde{\vee}^+_{0,1}, \tilde{\wedge}^+, \tilde{\exists}^+$
- $\vdash_c \tilde{\vee}^-, \tilde{\wedge}^-, \tilde{\exists}^-$

Теорема

Ако $\Gamma \vdash_c A$, то $\Gamma^g \vdash_m^{\to\forall} A^g$.

Доказателство.

- за *Stab* използваме Лема 4
- $\to^\pm, \forall^\pm$ се превеждат без промяна
- $\vee^\pm, \wedge^\pm, \exists^\pm$ се превеждат съгласно Лема 5, като използванията на *Stab* се заместват с доказателства съгласно Лема 4 □

Стъпка 4: възстановяване на изводимостта преди $\cdot^g$

Лема 6

$\vdash_c A \leftrightarrow A^g$

Стъпка 4: възстановяване на изводимостта преди $\cdot^g$

Лема 6

$\vdash_c A \leftrightarrow A^g$

Доказателство.

Индукция по A с използване на Лема 1 и Лема 3. $\square$

Стъпка 4: възстановяване на изводимостта преди $\cdot^g$

Лема 6

$\vdash_c A \leftrightarrow A^g$

Доказателство.

Индукция по A с използване на Лема 1 и Лема 3. □

Теорема

Ако $\Gamma^g \vdash_m^{\to\forall} A^g$*, то* $\Gamma \vdash_c A$.

Стъпка 4: възстановяване на изводимостта преди $\cdot^g$

Лема 6

$\vdash_c A \leftrightarrow A^g$

Доказателство.

Индукция по A с използване на Лема 1 и Лема 3. □

Теорема

Ако $\Gamma^g \vdash_m^{\to\forall} A^g$*, то* $\Gamma \vdash_c A$.

Доказателство.

В извода на A^g заместваме допусканията в Γ^g с доказателства с допускания от Γ съгласно правата посока на Лема 6 и прилагаме над обратната посока на Лема 6 за да получим извод на A. □