Нормални доказателства

Трифон Трифонов

λ-смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

4 юни 2019 г.

Нормализация в $Nm(\to\forall)$

(β-)редукция наричаме прилагане на $\circ^-$ правило непосредствено след съответното $\circ^+$ правило.

Нормализация в $Nm(\to\forall)$

(β-)редукция наричаме прилагане на $\circ^{-}$ правило непосредствено след съответното $\circ^{+}$ правило.

$$\to^{-}\ \dfrac{\to^{+}\ \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A \to B}\,u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B} \qquad \xrightarrow{\beta} \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{array}$$

Нормализация в $Nm(\rightarrow\forall)$

(β-)редукция наричаме прилагане на $\circ^-$ правило непосредствено след съответното $\circ^+$ правило.

$$
\begin{array}{c}
\dfrac{\rightarrow^{-}\;\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A\rightarrow B}\,\rightarrow^{+} u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}
\end{array}
\quad\stackrel{\beta}{\rightarrow}\quad
\begin{array}{c}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{array}
$$

$$
\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A\rightarrow B} N^A\right)^B \quad\stackrel{\beta}{\rightarrow}\quad M^B[u^A \mapsto N^A]
$$

Нормализация в $Nm(\to\forall)$

(β-)редукция наричаме прилагане на $\circ^-$ правило непосредствено след съответното $\circ^+$ правило.

$$\to^-\ \cfrac{\to^+\ \cfrac{\begin{array}{c}\cancel{[A^u]}\\ \mid M\\ B\end{array}}{A\to B}\,u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B} \quad \overset{\beta}{\to} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ [A]\\ \mid M\\ B\end{array}$$

$$\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A\right)^B \quad \overset{\beta}{\to} \quad M^B[u^A \mapsto N^A]$$

$$\forall^-\ \cfrac{\forall^+\ \cfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{\forall_x A}\,(*) \qquad t}{A[x\mapsto t]} \quad \overset{\beta}{\to} \quad \begin{array}{c}\mid M[x\mapsto t]\\ A[x\mapsto t]\end{array}$$

Нормализация в $Nm(\to\forall)$

(β-)редукция наричаме прилагане на $\circ^-$ правило непосредствено след съответното $\circ^+$ правило.

$$\begin{array}{c} \cancel{[A^u]} \\ \mid M \\ \to^+ \dfrac{\dfrac{B}{A \to B}\,u \qquad \begin{array}{c}\mid N\\ A\end{array}}{B}\,\to^- \end{array} \quad \xrightarrow{\beta} \quad \begin{array}{c} \mid N \\ [A] \\ \mid M \\ B \end{array}$$

$$\left((\lambda_{u^A} M^B)^{A\to B} N^A\right)^B \quad \xrightarrow{\beta} \quad M^B[u^A \mapsto N^A]$$

$$\begin{array}{c} \mid M \\ \forall^+ \dfrac{\dfrac{A}{\forall_x A}\,(*) \qquad t}{A[x \mapsto t]}\,\forall^- \end{array} \quad \xrightarrow{\beta} \quad \begin{array}{c} \mid M[x \mapsto t] \\ A[x \mapsto t] \end{array}$$

$$\left((\lambda_x M^A)^{\forall_x A} t\right)^{A[x\mapsto t]} \quad \xrightarrow{\beta} \quad M[x \mapsto t]^{A[x\mapsto t]}$$

Силна нормализация и конфлуентност

Теорема

Всяко доказателство е силно нормализируемо, т.е. всяка поредица от редукционни стъпки неизбежно завършва.

Силна нормализация и конфлуентност

Теорема

Всяко доказателство е силно нормализируемо, т.е. всяка поредица от редукционни стъпки неизбежно завършва.

Теорема

$\xrightarrow{\beta}$ *е конфлуентна, т.е. всяка поредица от редукционни стъпки води до една и съща нормална форма.*

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо
2. A_i е главна (лява) предпоставка на правило

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо
2. A_i е главна (лява) предпоставка на правило
3. A_n е

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо
2. A_i е главна (лява) предпоставка на правило
3. A_n е
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо
2. A_i е главна (лява) предпоставка на правило
3. A_n е
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или
   - вторична (дясна) предпоставка на $\to^-$, чиято главна предпоставка е на пътека от ред $k - 1$

Структура на доказателствата

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме път в дървото $A_0, A_1, \ldots, A_n$, където

1. A_0 е листо
2. A_i е главна (лява) предпоставка на правило
3. A_n е
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или
   - вторична (дясна) предпоставка на $\rightarrow^-$, чиято главна предпоставка е на пътека от ред $k - 1$

Задача

Всяка формула в дадено доказателство принадлежи на някоя пътека.

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$
- съществува *минимална формула* A_j, която разделя $\circ^-$ от $\circ^+$ правилата

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$
- съществува *минимална формула* A_j, която разделя $\circ^-$ от $\circ^+$ правилата
- всяка формула е подформула на заключението или на някое незадраскано допускане

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$
- съществува *минимална формула* A_j, която разделя $\circ^-$ от $\circ^+$ правилата
- всяка формула е подформула на заключението или на някое незадраскано допускане
- ако минималната формула е $A \to B$ или $\forall_x A$, можем да я заместим с

$$\to^- \dfrac{A \to B \qquad \cancel{A}^u}{\to^+ \dfrac{B}{A \to B}\, u} \quad \text{или} \quad \forall^- \dfrac{\forall_x A \qquad x}{\forall^+ \dfrac{A}{\forall_x A}}$$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$
- съществува *минимална формула* A_j, която разделя $\circ^-$ от $\circ^+$ правилата
- всяка формула е подформула на заключението или на някое незадраскано допускане
- ако минималната формула е $A \to B$ или $\forall_x A$, можем да я заместим с

$$\to^- \frac{A \to B \qquad \to^+ \dfrac{\dfrac{\cancel{A}^u}{B}}{A \to B}\, u}{} \quad \text{или} \quad \forall^- \frac{\forall_x A \qquad x}{\forall^+ \dfrac{A}{\forall_x A}}$$

- така можем да сведем минималната формула до атомарна

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\forall)$

Да разгледаме пътека в нормално доказателство:

- не можем $\circ^-$ да следва веднага $\circ^-$
- имаме (евентуално празна) последователност от $\circ^-$ и след това (евентуално празна) последователност от $\circ^+$
- съществува *минимална формула* A_j, която разделя $\circ^-$ от $\circ^+$ правилата
- всяка формула е подформула на заключението или на някое незадраскано допускане
- ако минималната формула е $A \to B$ или $\forall_x A$, можем да я заместим с

$$\to^- \frac{A \to B \qquad \cancel{A}^u}{\to^+ \dfrac{B}{A \to B}\, u} \quad \text{или} \quad \forall^- \frac{\forall_x A \qquad x}{\forall^+ \dfrac{A}{\forall_x A}}$$

- така можем да сведем минималната формула до атомарна
- получената нормална форма се нарича *дълга*

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y, x) = y + 2^x$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y, x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y,x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathsf{S}y)$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y, x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathrm{S}y)$
  - $C_2 := \forall_{x,y,z,v}\big(Ryxz \to Rzxv \to Ry(\mathrm{S}x)v\big)$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y, x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathsf{S}y)$
  - $C_2 := \forall_{x,y,z,v}\big(Ryxz \to Rzxv \to Ry(\mathsf{S}x)v\big)$
- Ще изразим функцията $2 \uparrow\uparrow n := \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y, x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathsf{S}y)$
  - $C_2 := \forall_{x,y,z,v}\big(Ryxz \to Rzxv \to Ry(\mathsf{S}x)v\big)$
- Ще изразим функцията $2 \uparrow\uparrow n := \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$
- $D_n := \tilde{\exists}_{\vec{z}}(R00z_0 \tilde{\wedge} R0z_0z_1 \tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge} R0z_{n-1}z_n)$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y,x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathsf{S}y)$
  - $C_2 := \forall_{x,y,z,v}\big(Ryxz \to Rzxv \to Ry(\mathsf{S}x)v\big)$
- Ще изразим функцията $2 \uparrow\uparrow n := \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$
- $D_n := \tilde{\exists}_{\vec{z}}(R00z_0 \,\tilde{\wedge}\, R0z_0z_1 \,\tilde{\wedge} \ldots \tilde{\wedge}\, R0z_{n-1}z_n)$
  - интиуция: $z_i := 2 \uparrow\uparrow i$

Експлозия при нормализация

Ще покажем, че при нормализация можем да получим експоненциална експлозия на големината на доказателството.

- Разглеждаме функцията $f(y,x) = y + 2^x$
- Графиката ѝ R може да се зададе със следните две (Хорнови) клаузи:
  - $C_1 := \forall_y Ry0(\mathsf{S}y)$
  - $C_2 := \forall_{x,y,z,v}\big(Ryxz \to Rzxv \to Ry(\mathsf{S}x)v\big)$
- Ще изразим функцията $2 \uparrow\uparrow n := \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n}$
- $D_n := \tilde{\exists}_{\vec{z}}(R00z_0 \mathbin{\tilde{\wedge}} R0z_0z_1 \mathbin{\tilde{\wedge}} \ldots \mathbin{\tilde{\wedge}} R0z_{n-1}z_n)$
  - интиуция: $z_i := 2 \uparrow\uparrow i$
- $G_n := C_1 \to C_2 \to D_n$

Извод на G_n

Разглеждаме помощните формули:

- $A_0(x) := \forall_y \tilde{\exists}_z Ryxz$
- $A_{i+1}(x) := \forall_y \big(A_i(y) \to \tilde{\exists}_z (A_i(z) \to Ryxz)\big)$
- интуиция: $A_i(x)$ означава "$i+1$-кратната итерация на f при фиксиран десен аргумент x дава резултат"

Извод на G_n

Разглеждаме помощните формули:

- $A_0(x) := \forall_y \tilde{\exists}_z Ryxz$
- $A_{i+1}(x) := \forall_y (A_i(y) \to \tilde{\exists}_z (A_i(z) \to Ryxz))$
- интуиция: $A_i(x)$ означава "$i+1$-кратната итерация на f при фиксиран десен аргумент x дава резултат"

Лема 1

$A_n(0)$ и $\forall_x (A_n(x) \to A_n(\mathsf{S}x))$ са изводими от C_1 и C_2 с доказателства с констатнтна (независима от n) дължина.

Извод на G_n

Разглеждаме помощните формули:

- $A_0(x) := \forall_y \tilde{\exists}_z Ryxz$
- $A_{i+1}(x) := \forall_y (A_i(y) \to \tilde{\exists}_z (A_i(z) \to Ryxz))$
- интуиция: $A_i(x)$ означава "$i+1$-кратната итерация на f при фиксиран десен аргумент x дава резултат"

Лема 1

$A_n(0)$ и $\forall_x (A_n(x) \to A_n(\mathrm{S}x))$ са изводими от C_1 и C_2 с доказателства с констатнтна (независима от n) дължина.

Теорема

G_n е изводимо с доказателство с дължина $O(n)$.

Извод на G_n

Разглеждаме помощните формули:

- $A_0(x) := \forall_y \tilde{\exists}_z Ryxz$
- $A_{i+1}(x) := \forall_y \big(A_i(y) \to \tilde{\exists}_z (A_i(z) \to Ryxz)\big)$
- интуиция: $A_i(x)$ означава "$i+1$-кратната итерация на f при фиксиран десен аргумент x дава резултат"

Лема 1

$A_n(0)$ и $\forall_x \big(A_n(x) \to A_n(\mathrm{S}x)\big)$ са изводими от C_1 и C_2 с доказателства с констатнтна (независима от n) дължина.

Теорема

G_n е изводимо с доказателство с дължина $O(n)$.

Теорема

Всяко нормално доказателство на G_n е с дължина поне $2 \uparrow\uparrow n$.

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee_0^+ \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\vee^-\ u,v
\quad \xrightarrow{\beta} \quad
\begin{array}{c}\mid M\\ [A]\\ \mid N\\ C\end{array}
$$

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$
\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{A\vee B}\vee_0^+ \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\vee^-\; u,v
\quad \xrightarrow{\beta} \quad
\begin{array}{c}\mid M\\ [A]\\ \mid N\\ C\end{array}
$$

$$
\vee^-\,(\vee_0^+ M^A)^{A\vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C) \quad \xrightarrow{\beta} \quad N^C[u^A \mapsto M^A]
$$

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$\dfrac{\vee_0^+ \dfrac{\begin{matrix}\mid M\\ A\end{matrix}}{A \vee B} \qquad \begin{matrix}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{matrix}}{C}\, \vee^- \; u, v \quad \xrightarrow{\beta} \quad \begin{matrix}\mid M\\ [A]\\ \mid N\\ C\end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \vee^- (\vee_0^+ M^A)^{A\vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C) &\xrightarrow{\beta} N^C[u^A \mapsto M^A] \\ \vee^- (\vee_0^+ M^A)^{A\vee B} P^{A\to C} Q^{B\to C} &\xrightarrow{\beta} (P^{A\to C} M^A)^C \end{aligned}$$

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}}{A \vee B}\vee_0^+ \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\vee^-\ u, v \quad \xrightarrow{\beta} \quad \begin{array}{c}\mid M\\ [A]\\ \mid N\\ C\end{array}$$

$$\vee^- \ (\vee_0^+ M^A)^{A\vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C) \quad \xrightarrow{\beta} \quad N^C[u^A \mapsto M^A]$$

$$\vee^- \ (\vee_0^+ M^A)^{A\vee B} P^{A\to C} Q^{B\to C} \quad \xrightarrow{\beta} \quad (P^{A\to C} M^A)^C$$

и аналогично

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mid M}{A}}{A \vee B}\,\vee_0^+ \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{A^u}}{\mid N}}{C} \qquad \dfrac{\dfrac{\cancel{B^v}}{\mid K}}{C}}{C}\,\vee^-\ u, v
\quad \xrightarrow{\beta} \quad
\begin{array}{c} \mid M \\ [A] \\ \mid N \\ C \end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\vee^- \, (\vee_0^+ M^A)^{A \vee B} (\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C) & \xrightarrow{\beta} & N^C[u^A \mapsto M^A] \\
\vee^- \, (\vee_0^+ M^A)^{A \vee B} P^{A \to C} Q^{B \to C} & \xrightarrow{\beta} & (P^{A \to C} M^A)^C
\end{array}
$$

и аналогично

$$
\vee^- \, (\vee_1^+ M^B)^{A \vee B} (\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C) \xrightarrow{\beta} K^C[v^B \mapsto M^B]
$$

β-редукция за $\vee$

Можем да въведем аналог на β-редукцията за $\vee$:

$$\vee^-\dfrac{\vee_0^+\dfrac{\begin{array}{c}|\,M\\A\end{array}}{A\vee B}\qquad\begin{array}{c}\cancel{A^u}\\|\,N\\C\end{array}\qquad\begin{array}{c}\cancel{B^v}\\|\,K\\C\end{array}}{C}\;u,v\qquad\xrightarrow{\beta}\qquad\begin{array}{c}|\,M\\ [A]\\ |\,N\\ C\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\vee^-\,(\vee_0^+M^A)^{A\vee B}(\lambda_{u^A}N^C)(\lambda_{v^B}K^C) & \xrightarrow{\beta} & N^C[u^A\mapsto M^A]\\ \cancel{\vee^-}\,(\vee_0^+M^A)^{A\vee B}P^{A\to C}Q^{B\to C} & \xrightarrow{\beta} & (P^{A\to C}M^A)^C\end{array}$$

и аналогично

$$\begin{array}{rcl}\vee^-\,(\vee_1^+M^B)^{A\vee B}(\lambda_{u^A}N^C)(\lambda_{v^B}K^C) & \xrightarrow{\beta} & K^C[v^B\mapsto M^B]\\ \cancel{\vee^-}\,(\vee_0^+M^B)^{A\vee B}P^{A\to C}Q^{B\to C} & \xrightarrow{\beta} & (Q^{B\to C}M^B)^C\end{array}$$

β-редукция за $\wedge$

Аналогично за $\wedge$:

$$\wedge^-\ \cfrac{\wedge^+\ \cfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ B\end{array}}{A\wedge B}\qquad\begin{array}{c}\cancel{A^u}\qquad\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\ u,v\qquad\xrightarrow{\beta}\qquad\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\mid M & \mid N\\ A & B\end{array}\\ \mid K\\ C\end{array}$$

β-редукция за $\wedge$

Аналогично за $\wedge$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\end{array}\qquad\begin{array}{c}\mid N\\ B\end{array}}{A\wedge B}\wedge^+ \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\quad \cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\wedge^-\, u,v \quad\xrightarrow{\beta}\quad \begin{array}{c}\begin{array}{cc}\mid M & \mid N\\ A & B\end{array}\\ \mid K\\ C\end{array}$$

$$\wedge^-\left\langle M^A, N^B\right\rangle^{A\wedge B}(\lambda_{u^A,v^B}K^C)\quad\xrightarrow{\beta}\quad K^C[u^A\mapsto M^A][v^B\mapsto N^B]$$

β-редукция за $\wedge$

Аналогично за $\wedge$:

$$\wedge^- \dfrac{\wedge^+ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mid N \\ B \end{array}}{A \wedge B} \qquad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \quad \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\, u, v \qquad \xrightarrow{\beta} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mid M & \mid N \\ A & B \end{array} \\ \mid K \\ C \end{array}$$

$$\wedge^- \left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A \wedge B} (\lambda_{u^A, v^B} K^C) \quad \xrightarrow{\beta} \quad K^C[u^A \mapsto M^A][v^B \mapsto N^B]$$

$$\wedge^- \left\langle M^A, N^B \right\rangle^{A \wedge B} P^{A \to B \to C} \quad \xrightarrow{\beta} \quad (P^{A \to B \to C} M^A N^B)^C$$

β-редукция за $\exists$

И за $\exists$:

$$\exists^- \;\dfrac{\exists^+ \;\dfrac{t \qquad \begin{array}{c} \mid M \\ A[x \mapsto t] \end{array}}{\exists_x A} \qquad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array}}{C}\; u \qquad \xrightarrow{\beta} \qquad \begin{array}{c} \mid M \\ [A[x \mapsto t]] \\ \mid N[x \mapsto t] \\ C \end{array}$$

β-редукция за $\exists$

И за $\exists$:

$$
\exists^- \dfrac{\exists^+ \dfrac{t \qquad \begin{array}{c} \mid M \\ A[x \mapsto t] \end{array}}{\exists_x A} \qquad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array}}{C} u
\quad \xrightarrow{\beta} \quad
\begin{array}{c} \mid M \\ [A[x \mapsto t]] \\ \mid N[x \mapsto t] \\ C \end{array}
$$

$$
\exists^- \left\langle t, M^{A[x \mapsto t]} \right\rangle^{\exists_x A} (\lambda_{x, u^A} N^C) \quad \xrightarrow{\beta} \quad N^C[x \mapsto t][u^{A[x \mapsto t]} \mapsto M^{A[x \mapsto t]}]
$$

И за $\exists$:

$$\exists^-\ \dfrac{\exists^+\ \dfrac{t \qquad \overset{|\,M}{A[x \mapsto t]}}{\exists_x A} \qquad \overset{\cancel{A}^u}{\overset{|\,N}{C}}}{C}\ u \qquad \stackrel{\beta}{\rightarrow} \qquad \begin{array}{c} |\,M \\ [A[x \mapsto t]] \\ |\,N[x \mapsto t] \\ C \end{array}$$

$$\exists^- \left\langle t, M^{A[x \mapsto t]} \right\rangle^{\exists_x A} (\lambda_{x,u^A} N^C) \quad \stackrel{\beta}{\rightarrow} \quad N^C[x \mapsto t][u^{A[x \mapsto t]} \mapsto M^{A[x \mapsto t]}]$$

$$\exists^- \left\langle t, M^{A[x \mapsto t]} \right\rangle^{\exists_x A} P^{\forall_x (A \rightarrow C)} \quad \stackrel{\beta}{\rightarrow} \quad (P^{\forall_x (A \rightarrow C)}\ t\ M^{A[x \mapsto t]})^C$$

Блокиране на β-редукция

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да "блокират" потенциална β-редукция.

Блокиране на β-редукция

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да “блокират” потенциална β-редукция.

Пример:

$$
\to^{-}\dfrac{
  \vee^{-}\dfrac{
    \begin{array}{c}\mid M\\ A\vee B\end{array}
    \quad
    \to^{+}\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{A^u}\qquad\cancel{C^w}\\ \mid N\\ D\end{array}}{C\to D}\,w
    \quad
    \to^{+}\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{B^v}\qquad\cancel{C^w}\\ \mid K\\ D\end{array}}{C\to D}\,w
  }{C\to D}\,u,v
  \qquad
  \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}
}{D}
$$

Блокиране на β-редукция

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да “блокират” потенциална β-редукция.

Пример:

$$\vee^-\ \cfrac{\to^-\ \cfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\vee B\end{array}\quad \to^+\ \cfrac{\begin{array}{c}\cancel{A^u}\quad \cancel{C^w}\\ \mid N\\ D\end{array}}{C\to D}\,w \quad \to^+\ \cfrac{\begin{array}{c}\cancel{B^v}\quad \cancel{C^w}\\ \mid K\\ D\end{array}}{C\to D}\,w}{C\to D}\,u,v \qquad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D}$$

Бихме искали да можем да разменим $\vee^-$ и $\to^-$:

$$\vee^-\ \cfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\vee B\end{array}\quad \begin{array}{c}\to^+\\ \to^-\end{array}\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\cancel{A^u}\quad \cancel{C^w}\\ \mid N\\ D\end{array}}{C\to D}\,w \quad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D} \quad \begin{array}{c}\to^+\\ \to^-\end{array}\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\cancel{B^v}\quad \cancel{C^w}\\ \mid K\\ D\end{array}}{C\to D}\,w \quad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D}}{D}\,u,v$$

Пермутиране на $\vee^-$ и $\to^-$

$$
\to^-\ \dfrac{\vee^-\ \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \vee B \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \to D \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \to D \end{matrix}}{C \to D}\ u, v \qquad \begin{matrix} \mid L \\ C \end{matrix}}{D}
$$

$$
\downarrow \pi
$$

$$
\vee^-\ \dfrac{\begin{matrix} \mid M \\ A \vee B \end{matrix} \qquad \to^-\ \dfrac{\begin{matrix} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \to D \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mid L \\ C \end{matrix}}{D} \qquad \to^-\ \dfrac{\begin{matrix} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \to D \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mid L \\ C \end{matrix}}{D}}{D}\ u, v
$$

Пермутиране на $\vee^-$ и $\to^-$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\vee B\end{array}\qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\to D\end{array}\qquad \begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\to D\end{array}}{C\to D}\,\vee^-\; u,v \qquad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D}\,\to^-$$

$$\downarrow \pi$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A\vee B\end{array}\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\to D\end{array}\qquad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D}\,\to^- \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\to D\end{array}\qquad \begin{array}{c}\mid L\\ C\end{array}}{D}\,\to^-}{D}\,\vee^-\; u,v$$

$$(\vee^-_{A,B,C\to D}(\lambda_{u^A}N^{C\to D})(\lambda_{v^B}K^{C\to D})L^C)^D \xrightarrow{\pi} (\vee^-_{A,B,D}(\lambda_{u^A}N^{C\to D}L^C)(\lambda_{v^B}K^{C\to D}L^C))^D$$

Възможни пермутативни конверсии

$\xrightarrow{\pi}$	$\to^-$	$\vee^-$	$\wedge^-$	$\forall^-$	$\exists^-$
$\vee^-$	$\checkmark$				
$\wedge^-$					
$\exists^-$					

Задача

Да се опишат останалите 14 пермутативни конверсии.

Опростяващи конверсии

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да бъдат приложени изкуствено ненужно.

Опростяващи конверсии

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да бъдат приложени изкуствено ненужно.

$$\vee^-\ \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ A \vee B\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{B^v}\\ \mid K\\ C\end{array}}{C}\ u,v \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array},\ \text{ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

Опростяващи конверсии

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да бъдат приложени изкуствено ненужно.

$$\vee^-\ \dfrac{\begin{array}{c} \mid M \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\ u, v \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c} \mid N \\ C \end{array}, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\vee^-\ M^{A \vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C)\right)^C \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad N^C, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

Опростяващи конверсии

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да бъдат приложени изкуствено ненужно.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \mid M \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\, u, v \; \vee^- \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c} \mid N \\ C \end{array}, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\vee^- M^{A \vee B}(\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C)\right)^C \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad N^C, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \mid M \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\, u, v \; \vee^- \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c} \mid K \\ C \end{array}, \text{ ако } v \notin \mathrm{FA}(K)$$

Опростяващи конверсии

Правилата $\vee^-, \wedge^-, \exists^-$, които използват допълнителна формула C, могат да бъдат приложени изкуствено ненужно.

$$\vee^- \frac{\begin{array}{c} \\ \mid M \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\, u, v \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c} \mid N \\ C \end{array}, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\vee^- M^{A \vee B} (\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C)\right)^C \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad N^C, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\vee^- \frac{\begin{array}{c} \\ \mid M \\ A \vee B \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{A^u} \\ \mid N \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{B^v} \\ \mid K \\ C \end{array}}{C}\, u, v \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c} \mid K \\ C \end{array}, \text{ ако } v \notin \mathrm{FA}(K)$$

$$\left(\vee^- M^{A \vee B} (\lambda_{u^A} N^C)(\lambda_{v^B} K^C)\right)^C \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad K^C, \text{ ако } v \notin \mathrm{FA}(K)$$

Опростяващи конверсии за $\wedge^-$ и $\exists^-$

$$\wedge^- \dfrac{\dfrac{\mid M}{A \wedge B} \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u} \quad \cancel{B^v} \\ \mid N \\ C\end{array}}{C}\, u, v \quad \stackrel{\sigma}{\rightarrow} \quad \begin{array}{c}\mid N \\ C\end{array}, \text{ ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

Опростяващи конверсии за $\wedge^-$ и $\exists^-$

$$\dfrac{\dfrac{\mid M}{A \wedge B} \qquad \dfrac{\cancel{A^u} \quad \cancel{B^v}}{\mid N \atop C}}{C} \wedge^- u, v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad {\mid N \atop C}, \text{ ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\wedge^- M^{A\wedge B}(\lambda_{u^A, v^B} N^C)\right)^C \quad \xrightarrow{\sigma} \quad N^C, \text{ ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

Опростяващи конверсии за $\wedge^-$ и $\exists^-$

$$\wedge^- \dfrac{\dfrac{\mid M}{A \wedge B} \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u} \quad \cancel{B^v}\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\,u, v \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array},\ \text{ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\wedge^- M^{A \wedge B}(\lambda_{u^A, v^B} N^C)\right)^C \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad N^C,\ \text{ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\exists^- \dfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ \exists_x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\,u \quad \stackrel{\sigma}{\to} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array},\ \text{ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

Опростяващи конверсии за $\wedge^-$ и $\exists^-$

$$\wedge^- \cfrac{\cfrac{\mid M}{A \wedge B} \qquad \cfrac{\cancel{A^u} \quad \cancel{B^v}}{\begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array}}}{C}\, u, v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array}, \text{ ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\wedge^- M^{A\wedge B}(\lambda_{u^A, v^B} N^C)\right)^C \quad \xrightarrow{\sigma} \quad N^C, \text{ ако } u, v \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\exists^- \cfrac{\begin{array}{c}\mid M\\ \exists_x A\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{A^u}\\ \mid N\\ C\end{array}}{C}\, u \quad \xrightarrow{\sigma} \quad \begin{array}{c}\mid N\\ C\end{array}, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

$$\left(\exists^- M^{\exists_x A}(\lambda_{x, u^A} N^C)\right)^C \quad \xrightarrow{\sigma} \quad N^C, \text{ ако } u \notin \mathrm{FA}(N)$$

Силна нормализация и конфлуентност на $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Теорема

$\xrightarrow{\beta,\pi,\sigma}$ *е силно нормализираща.*

Силна нормализация и конфлуентност на $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Теорема

$\xrightarrow{\beta,\pi,\sigma}$ *е силно нормализираща.*

Теорема

$\xrightarrow{\beta,\pi,\sigma}$ *е конфлуентна.*

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Сегмент)

Сегмент с дължина n в дадено доказателство наричаме път в дървото от еднакви формули такъв, че:

1. всички възли без последния са вторични (десни) предпоставки на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Сегмент)

Сегмент с дължина n в дадено доказателство наричаме път в дървото от еднакви формули такъв, че:

1. всички възли без последния са вторични (десни) предпоставки на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$
2. всички възли без първия са заключения на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Сегмент)

Сегмент с дължина n в дадено доказателство наричаме път в дървото от еднакви формули такъв, че:

1. всички възли без последния са вторични (десни) предпоставки на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$
2. всички възли без първия са заключения на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$

Ако последният възел в сегмента е главна предпоставка на $\circ^-$ правило, сегмента наричаме *максимален* или *cut сегмент*.

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Сегмент)

Сегмент с дължина n в дадено доказателство наричаме път в дървото от еднакви формули такъв, че:

1. всички възли без последния са вторични (десни) предпоставки на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$
2. всички възли без първия са заключения на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$

Ако последният възел в сегмента е главна предпоставка на $\circ^-$ правило, сегмента наричаме *максимален* или *cut сегмент*.

Факт: всеки възел, който не е нито вторична предпоставка, нито заключение на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$ е сегмент с дължина 1.

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\rightarrow\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\rightarrow^+$

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, а σ_{i+1} започва със задраскано листо от същото правило

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, а σ_{i+1} започва със задраскано листо от същото правило
3. σ_n завършва като

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, а σ_{i+1} започва със задраскано листо от същото правило
3. σ_n завършва като
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, а σ_{i+1} започва със задраскано листо от същото правило
3. σ_n завършва като
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, което не задрасква листа, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или

Структура на нормалните доказателства в $Nm(\to\wedge\vee\forall\exists)$

Дефиниция (Пътека в доказателство)

Пътека от ред k в доказателство наричаме последователност от сегменти $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n$, такава, че

1. σ_0 започва с листо, което не е задраскано или е задраскано от $\to^+$
2. σ_i завършва като
   - главна предпоставка на $\to^-$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, а σ_{i+1} започва със задраскано листо от същото правило
3. σ_n завършва като
   - корен, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или
   - главна предпоставка на $\vee^-, \wedge^-$ или $\exists^-$, което не задрасква листа, тогава пътеката е от ред $k = 0$; или
   - вторична предпоставка на $\to^-$, чиято първична предпоставка е в пътека от ред $k - 1$.

Свойства на нормалните доказателства

Задача

Всяка формула в произволно доказателство принадлежи на някоя пътека.

Свойства на нормалните доказателства

Задача

Всяка формула в произволно доказателство принадлежи на някоя пътека.

Твърдение 1

В нормално доказателство съществува минимален сегмент, който служи за разделителна линия между последователни прилагания на $\circ^-$ *и* $\circ^+$ *правила.*

Свойства на нормалните доказателства

Задача

Всяка формула в произволно доказателство принадлежи на някоя пътека.

Твърдение 1

В нормално доказателство съществува минимален сегмент, който служи за разделителна линия между последователни прилагания на $\circ^-$ *и* $\circ^+$ *правила.*

Твърдение 2 (Свойство на подформулите)

В нормално доказателство всяка формула е подформула на заключението или на някое незадраскано допускане.

Извличане на свидетели от нормални доказателства

Теорема (Свойство на $\vee$)

Ако $\Gamma \vdash_m A \vee B$ *и* Γ *не съдържа* $\vee$, *то* $\Gamma \vdash_m A$ *или* $\Gamma \vdash_m B$.

Извличане на свидетели от нормални доказателства

Теорема (Свойство на $\vee$)

Ако $\Gamma \vdash_m A \vee B$ *и* Γ *не съдържа* $\vee$, *то* $\Gamma \vdash_m A$ *или* $\Gamma \vdash_m B$.

Доказателство.

Проследяване на главната пътека до достигане на $\vee^+$. $\square$

Извличане на свидетели от нормални доказателства

Теорема (Свойство на $\vee$)

Ако $\Gamma \vdash_m A \vee B$ *и* Γ *не съдържа* $\vee$, *то* $\Gamma \vdash_m A$ *или* $\Gamma \vdash_m B$.

Доказателство.

Проследяване на главната пътека до достигане на $\vee^+$. $\square$

Теорема (Свойство на $\exists$)

Ако $\Gamma \vdash_m \exists_x A$ *и* Γ *не съдържа* $\exists$, *то съществуват термове* $\vec{t}$, *така че* $\Gamma \vdash_m A[x \mapsto t_1] \vee \ldots \vee A[x \mapsto t_n]$.

Извличане на свидетели от нормални доказателства

Теорема (Свойство на $\vee$)

Ако $\Gamma \vdash_m A \vee B$ и Γ не съдържа $\vee$, то $\Gamma \vdash_m A$ или $\Gamma \vdash_m B$.

Доказателство.

Проследяване на главната пътека до достигане на $\vee^+$. $\square$

Теорема (Свойство на $\exists$)

Ако $\Gamma \vdash_m \exists_x A$ и Γ не съдържа $\exists$, то съществуват термове $\vec{t}$, така че $\Gamma \vdash_m A[x \mapsto t_1] \vee \ldots \vee A[x \mapsto t_n]$. Ако в допълнение Γ не съдържа и $\vee$, то съществува терм t, така че $\Gamma \vdash_m A[x \mapsto t]$.

Доказателство.

Проследяване на главната пътека до достигане на $\vee^-$ или $\exists^+$. $\square$