

# Интерпретация за реализуемост

Трифон Трифонов

$\lambda$ -смятане и теория на доказателствата, 2018/19 г.

4 юни 2019 г.

## Тип синглетон (unit)

Нека въведем синглетонния тип  $1$  с единствена константа  $\varepsilon$ . Поради липсата на странични ефекти в  $\lambda$ -смятането, термовете от тип  $1$  нямат изчислителна значимост, тъй като не носят информация. Ще дефинираме редукции за типове, термове, формули и доказателства, които елиминират типа  $1$  и всички термове от него. Ще считаме, че редукциите се изпълняват имплицитно при конструиране на типове, термове, формули и доказателства.

Дефиниция ( $\dashv$  за типове)

$$\begin{array}{ll} \rho \otimes 1 & \dashv \rho, & \rho \Rightarrow 1 & \dashv 1, \\ 1 \otimes \rho & \dashv \rho, & 1 \Rightarrow \rho & \dashv \rho, \end{array}$$

# Редукция на $\lambda$ и $\varepsilon$

Дефиниция ( $\xrightarrow{\varepsilon}$  за термове)

$$\begin{array}{ll} s^{\lambda} & \xrightarrow{\varepsilon} \varepsilon, \\ s^{\rho} \varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon} s^{\rho}, \\ \varepsilon s^{\rho} & \xrightarrow{\varepsilon} \varepsilon, \\ \text{Pair}_{\rho, \lambda} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{x^{\rho}} x, \\ \text{Pair}_{\lambda, \rho} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{x^{\rho}} x, \end{array} \quad \begin{array}{ll} \lambda_{x^{\lambda}} s^{\rho} & \xrightarrow{\varepsilon} s^{\rho}, \\ \lambda_{x^{\rho}} \varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon} \varepsilon, \\ \text{Split}_{\rho, \lambda}^{\tau} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{x^{\rho}} \lambda_{f^{\rho} \Rightarrow \tau} f x, \\ \text{Split}_{\lambda, \rho}^{\tau} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{x^{\rho}} \lambda_{f^{\rho} \Rightarrow \tau} f x. \end{array}$$

Дефиниция ( $\xrightarrow{\lambda}$  за формули)

$$\forall_{x^{\lambda}} A \xrightarrow{\lambda} A \quad \exists_{x^{\lambda}} A \xrightarrow{\lambda} A$$

Дефиниция ( $\xrightarrow{\varepsilon}$  за доказателства)

$$\begin{array}{ll} \lambda_{x^{\lambda}} M^A & \xrightarrow{\varepsilon} M^A \\ \exists_{x^{\lambda}, A}^{+} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{u^A} u \end{array} \quad \begin{array}{ll} M^A \varepsilon & \xrightarrow{\varepsilon} M^A \\ \exists_{x^{\lambda}, A, C}^{-} & \xrightarrow{\varepsilon} \lambda_{u^A, v^A \rightarrow C} v u \end{array}$$

# Интерпретация за реализуемост

Интерпретацията за (модифицирана) реализуемост е предложена от Kreisel (1959).

Идея: доказателството е програма със сертификат за коректност

- Формулата  $A$  е *задача*
- Програмата  $t$  е *решение*
- Формулата определя *типа на решението*  $\tau(A)$
- *Реализационната формула*  $|A|^t$  определя кога  $t$  е решение на  $A$
- Доказателство  $M$  на  $A$  разслюваема на две части:
  - 1 решение  $\llbracket M \rrbracket$  на  $A$  от тип  $\tau(A)$
  - 2 доказателство  $\overline{M}$  на  $|A|^{\llbracket M \rrbracket}$

## Реализиращ тип

Работим в  $\text{HA}^\omega$ , като считаме, че  $\vee$  е дефинирана по следния начин:

$$\begin{aligned}A \vee B &:= \exists_{b^{\mathbf{B}}} ((b = \text{tt} \rightarrow A) \wedge (b = \text{ff} \rightarrow B)), \\ \vee_{A,B}^{+0} &:= \lambda_{u^A} \langle \text{tt}, \langle \lambda_{v^T} u, \lambda_{v^F} \text{efq}_B v \rangle \rangle, \\ \vee_{A,B}^{+1} &:= \lambda_{u^A} \langle \text{ff}, \langle \lambda_{v^F} \text{efq}_A v, \lambda_{v^T} u \rangle \rangle, \\ \vee_{A,B,C}^- &:= \lambda_{u^{A \vee B}, v^{A \rightarrow C}, w^{B \rightarrow C}} \exists^- u \left( \lambda_{b^{\mathbf{B}, C}} \mathcal{C} b (v(c_{\perp} A x T)) (w(c_{\perp} A x T)) \right).\end{aligned}$$

### Дефиниция

За всяка формула  $A$  дефинираме  $\tau(A)$ .

- $\tau(\rho \bar{t}) := \mathbf{I}$
- $\tau(A \rightarrow B) := \tau(A) \Rightarrow \tau(B)$
- $\tau(A \wedge B) := \tau(A) \otimes \tau(B)$
- $\tau(\forall_{x^\rho} A) := \rho \Rightarrow \tau(A)$
- $\tau(\exists_{x^\rho} A) := \rho \otimes \tau(A)$

# Интерпретация на формулите

Означаваме  $\text{NA}^\omega := \text{HA}^\omega(\rightarrow, \forall)$ .

## Дефиниция

За всяка формула  $A$  в  $\text{HA}^\omega$  дефинираме формулата  $|A|^t$  в  $\text{NA}^\omega$ , където  $t^{\tau(A)}$ .

- $|p\vec{s}|^\varepsilon := p\vec{s}$
- $|A \rightarrow B|^f := \forall_{x^{\tau(A)}} |A|^x \rightarrow |B|^{fx}$
- $|A \wedge B|^t := |A|^{t_L} \tilde{\wedge} |B|^{t_U}$
- $|\forall_{x^\rho} A|^f := \forall_{x^\rho} |A|^{fx}$
- $|\exists_{x^\rho} A|^t := |A[x \mapsto t_L]|^{t_U}$

# Свойства на интерпретацията

## Твърдение 1

$$\tau(A[x \mapsto t]) \equiv \tau(A)$$

## Твърдение 2

$$FV(|A|^t) \subseteq FV(A) \cup FV(t).$$

## Твърдение 3

Ако  $A$  е формула от  $NA^\omega$ , то  $\tau(A) \equiv \perp$  и  $|A|^\varepsilon \equiv A$ .

# Коректност на реализуемостта

## Теорема

Нека  $\mathcal{P}^A$  е доказателство от допускания  $u_i : C_i$ . Тогава съществува терм  $\llbracket \mathcal{P} \rrbracket^{\tau(A)}$  със свободни променливи  $x_i : \tau(C_i)$  и доказателство  $\overline{\mathcal{P}} : |A|^{\llbracket \mathcal{P} \rrbracket}$  от допускания  $\overline{u}_i : |C_i|^{x_i}$ .

## Доказателство.

$\llbracket u_i \rrbracket$	$:= x_i$	$\llbracket \text{AxT} \rrbracket$	$:= \varepsilon$
$\llbracket \lambda_{u_0} M \rrbracket$	$:= \lambda_{x_0} \llbracket M \rrbracket$	$\llbracket MN \rrbracket$	$:= \llbracket M \rrbracket \llbracket N \rrbracket$
$\llbracket \wedge^+ \rrbracket$	$:= \text{Pair}$	$\llbracket \wedge^- \rrbracket$	$:= \text{Split}$
$\llbracket \lambda_x M \rrbracket$	$:= \lambda_x \llbracket M \rrbracket$	$\llbracket Mt \rrbracket$	$:= \llbracket M \rrbracket t$
$\llbracket \exists^+ \rrbracket$	$:= \text{Pair}$	$\llbracket \exists^- \rrbracket$	$:= \text{Split}$
$\llbracket C \rrbracket$	$:= \text{Cases}$	$\llbracket \text{Ind} \rrbracket$	$:= \mathcal{R}$ .

