Теоретични основи на индустриалната математика II

Допълнителни задачи

За зад. 1–3 да се направи параметрична идентификация на база на дадените данни, като се направят числени експерименти с методите на най-бързото спускане, Нютон, Гаус–Нютон, Levenberg–Marquardt. Сравнете броя итерации по всеки метод. За решаване на линейните задачи за НМК, където това е необходимо, да се експериментира с SVD/QR/нормални уравнения (могат да се използват вградени функции за намиране на разлаганията).

Задача 1. Да се определят параметрите във функцията

$$f(x) = A\cos x\sqrt{x+B}$$

на базата на следните данни:

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	2	1.53	-1.44	-3.96	-2.9	1.3

Задача 2. Да се определи еластичният коефициент на пружина и началното положение на закачена за нея маса от 10 кг, като се направи параметрична идентификация в следния модел:

$$\ddot{x} = 9.81 - \frac{kx}{10},$$
$$x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = 0$$

на база на следните данни

t	0.5	1	1.5	2	2.5	3
x(t)	1.25	4.4	8.4	12	13.8	13.3

Задача 3. Да се определят коефициентът на дифузия и адвективната скорост в модела

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$u(x,0) = \sin(2\pi x),$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

на базата на следните данни:

x	0.2	0.4	0.6	0.8
u(x,1)	0.006	0.011	0.014	0.01
u(x,2)	0.00042	0.0008	0.001	0.00077

За решаването на диференциалната задача да се изпозва устойчива диференчна схема или МКЕ.

Задача 4. Намерете равновесните точки за системата и определете устойчивостта им. Нарисувайте фазов портрет.

$$x' = 2x - y + 2xy + 3(x^2 - y^2),$$
$$y' = x - 3y + xy - 3(x^2 - y^2).$$

Задача 5. Разгледайте системата

$$\dot{x} = (a - by - \lambda x)x,$$
$$\dot{y} = (-d + cx - \mu y)y.$$

Определете равновесните точки и изследвайте тяхната устойчивост. Всички параметри в системата са положителни.

Задача 6. Даденото уравнение е известно още като осцилатор на Van der Pol:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

където $\mu > 0$. Преформулирайте задачата като система ОДУ и скицирайте фазовия портрет за системата като използвате нулевите изоклини. Определете устойчивостта на равновесните точки.

Задача 7. Използвайте критерия на Dulac за динамичната система

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -ax - by + cx^2 + dy^2,$$

с функция на Dulac $\psi(x, y) = e^{-2dx}$, за да покажете, че системата няма периодични орбити.

Задача 8. Покажете, че функцията $V(x, y) = \ln(1 + x^2) + y^2$ е функция на Ляпунов за системата

$$\dot{x} = x(y - 1),$$
$$\dot{y} = -\frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Задача 9. Дадена е динамичната система

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = -y + y^3 - x^5.$$

Разгледайте фазовото пространство $D = \{(x, y) : \ x^6 + 3y^3 < 3\}$ и покажете, че функцията $V(x, y) = x^6 + 3y^2$ е слаба функция на Ляпунов за системата. Използвайте принципа на ЛаСал, за да докажете, че точката (0,0) е глобално асимптотично устойчива.