Поправителен изпит-задачи по Дискретни структури, Инф. & КН2, 02.09.2019 г.

Име:.. ФN°:............. Група:.... Спец.:.....

Зад.	1	2	3	4	Общо
точки					
от макс.	25	25	15	35	100

Зад. 1 Нека $n \in \mathbb{N}$. Пресметнете сумата

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

Зад. 2 Дефинираме релацията $R \subseteq (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}) \times (\mathbb{N} \setminus \{0, 1\})$ по следния начин. За всеки $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $(m, n) \in R$ тогава и само тогава, когато сумата от различните прости множители на m е по-малка или равна от произведението от различните прости множители на n. Например, $(75, 14) \in R$, защото $3 + 5 \leq 2 \cdot 7$. Изследвайте R за свойствата рефлексивност (5 точки), антисиметричност (10 точки) и транзитивност (10 точки).

Зад. 3 В магазина на Христо се продават следните плодове: праскови, кайсии, ябълки, круши и джанки. Плодовете от всеки вид са неразличими. По колко начина можем да купим 20 плода сутринта, когато Христо е заредил магазина току-що и има по 100 плода от всеки вид (5 точки)? По колко начина можем да купим 20 плода привечер, когато Христо е продал голямата част от стоката и са останали 25 праскови и по 5 плода от всеки от останалите видове? Дайте отговор-число (10 точки).

Зад. 4 Докажете, че във всеки свързан граф, всеки два най-дълги пътя имат общ връх (12 точки). Докажете, че във всяко дърво, всеки три най-дълги пътя имат общ връх (23 точки).

Първата задача се решава елементарно с рекурентното уравнение

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0, \\ a_{n-1} + n\left(\frac{1}{2}\right)^n, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

Решението е

$$a_n = 2 - (n+2)2^{-n}$$

За релацията R във втората задача:

- е вярно, че е рефлексивна, понеже произведението на числа, по-големи от единица, е по-голямо от тяхната сума.
- не е вярно, че е антисиметрична; за контпрапример може да разгледаме 26 и 33, тъй като $2+13 \leq 3 \cdot 11$ и $3+11 \leq 2 \cdot 13$, така че $(26, 33) \in R$ и $(33, 26) \in R$.
- не е вярно, че е транзитивна. За контрапример може да вземем 33, 35 и 13. Очевидно $3+11 \leq 5 \cdot 7$ и $5+7 \leq 13$, така че $(33, 35) \in R$ и $(35, 13) \in R$, но $3+11 \not\leq 13$, така че $(33, 13) \notin R$.

В задачата с плодовете, първото подусловие пита колко са мултимножествата с 20 елемента, изградени от опорно множество с мощност 5. Както знаем от лекции, отговорът е $\binom{20+5-1}{5-1} = 10\,626$. Втората подзадача може да се реши с принципа на включването и изключването. Нека U означава множеството от всички възможни избирания на 20 плода без ограничения. Както вече видяхме, $|U| = 10\,626$. Нека S_1 са избиранията на 20 плода, в които има поне 6 кайсии, S_2 са избиранията на 20 плода, в които има поне 6 ябълки, S_3 са избиранията на 20 плода, в които има поне 6 круши и S_4 са избиранията на 20 плода, в които има поне 6 джанки. Търсим $|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}|$. Съгласно принципа на вкл-изкл.:

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq 4} |S_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |S_i \cap S_j| + \cdots + (-1)^4 |S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4|$$

Очевидно $|S_1| = |S_2| = |S_3| = |S_4|$, $|S_1 \cap S_2| = \cdots = |S_3 \cap S_4|$, $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = \cdots = |S_2 \cap S_3 \cap S_4|$ и $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 = \emptyset$, така че

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}| = |U| - \binom{4}{1}|S_1| + \binom{4}{2}|S_1 \cap S_2| - \binom{4}{3}|S_1 \cap S_2 \cap S_3| + 0$$

$|S_1| = \binom{14+5-1}{5-1} = 3060$, тъй като има очевидна биекция между тези избирания (в които има кайсия-нарушител, това е шестата кайсия) и произволни избирания на $20-6 = 14$ плода. Аналогично, $|S_1 \cap S_2| = \binom{8+5-1}{5-1} = 495$ и $|S_1 \cap S_2 \cap S_3| = \binom{2+5-1}{5-1} = 15$. И така:

$$|\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3} \cap \overline{S_4}| = 10\,626 - 4 \cdot 3\,060 + 6 \cdot 495 - 4 \cdot 15 = 1296$$

Много по-кратко решение на тази задача е следното.

> Броят на купените джанки е кое да е цяло число от 0 до 5 вкл. Същото важи за кайсиите, ябълките и крушите. За прасковите нямаме избор: след като сме купили джанките, ябълките, крушите и кайсиите, останалите плодове трябва да бъдат праскови. От 0 до 5 вкл. има шест цели числа, тоест имаме по 6 възможни стойности за броя на джанките, кайсиите, ябълките и крушите. Според правилото за умножение всички варианти са $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$.

В четвъртата задача доказателството, че всеки два максимални пътя в свързан граф имат общ връх е елементарно, но трябва да се напише с необходимите детайли. Ако допуснем противното, то има свързан граф G с поне два максимални пътя p и q, нямащи общ връх. Лесно се вижда, че трябва да има друг път, по-дълъг от тях, тъй като графът е свързан, и това противоречи на допускането, че p и q са максимални. Но това не е доказателство, а само идея за д-во. Д-вото трябва да е прецизно.

Нека $|p| = |q| = k$. Вземаме произволен връх x от p и произволен връх y от q. Щом G е свързан, то има път r между x и y. Да се каже, че слепването на част от p, завършваща с x, r и част от q, започваща с y, е път с дължина, по-голяма от k, е некоректно. В общия случай r може да пресича много пъти както p, така и q, така че въпросният път-слепване не е непременно прост. Разсъждаваме така. Върховете на r са три вида:

- "бели" върхове: общи с p (поне x е такъв),
- "черни" върхове, общи с q (поне y е такъв),
- "сиви" върхове: останалите (такива може да няма).

Очевидно е, че щом краищата на r са бял и черен, то в r съществуват върхове u (бял) и v (черен), такива че между u и v в r или няма върхове, или има само сиви върхове. Нека подпътят на r от u до v се нарича r'. Очевидно $|r'| \geq 1$.

p има два подпътя, да ги наречем p' и p'', всеки с край u, такива че p е "слепването" на p' и p'' в u. Аналогично, q има два подпътя, да ги наречем q' и q'', всеки с край v, такива че q е "слепването" на q' и q'' в v. Б.о.о., нека $|p'| \geq |p''|$ и $|q'| \geq |q''|$. Тогава $|p'|, |q'| \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$. Тогава пътят в G, който се получава от p', слепен с r', слепен с q', е прост и има дължина $\geq 2\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1$. Но това е повече от k. Построихме прост път, по-дълъг от k, в противоречие с допускането, че k е горна граница за дължината на пътищата в G.

Сега ще покажем, че във всяко дърво, всеки три максимални пътя имат общ връх. Да допуснем противното. Тогава има дърво T с максимални пътища p, q и r, такива че няма връх, принадлежащ и на трите. T е свързан граф по дефиниция и от предната подзадача следва, че:

- p и q имат общ връх x,
- p и r имат общ връх y и
- q и r имат общ връх z,

като x, y и z са три различни върха. x и y са различни върхове от p, y и z са различни върхове от r и x и z са различни върхове от q. Нека подпътят на p между x и y е p', подпътят на q между x и z е q' и подпътят на r между y и z е r'. Да разгледаме p'. z не е връх от p'. Нека q'' е подпътят на q' с един край z и друг (различен от z) край x' от p, нямащ общ вътрешен връх с p. Нека r'' е подпътят на r' с един край z и друг (различен от z) край y' от p, нямащ общ вътрешен връх с p. Нека p'' е подпътят на p между x'' и y''. q'' и r'' имат дължина поне единица, докато p'' може да има дължина 0 (ако $x'' = y''$). Във всеки случай, слепването на p'', q'' и r'' е прост цикъл, понеже тези три пътя, два по два, нямат общи вътрешни върхове.

Но тогава в T има прост цикъл, което противоречи на дефиницията на "дърво" – в дърветата няма цикли. Следователно, допускането е погрешно.