

Домашна работа No 2

Задача 1. Разглеждаме числения метод с тегло θ

$$y_{j+1} = y_j + h\theta f_{j+1} + h(1 - \theta)f_j.$$

- Кои методи се получават при $\theta = 0$ и $\theta = 1$?
- Как даденият метод може да бъде изведен от явния и неявния метод на Ойлер?
- За кои стойности на θ методът е неявен?
- Изведете условие за А-устойчивост за произволно θ .
- За кои стойности на θ методът е А-устойчив (за всяко $h > 0$)?
- За кои стойности на θ методът е монотонен (за всяко $h > 0$)?
- Покажете, че за всяко θ ЛГА е $O(h)$.
- Съществува ли стойност на θ , за която ЛГА е $O(h^2)$?

Задача 2. Разглеждаме уравнението

$$u'(t) = -300t^2y^3, \quad 0 \leq t \leq 3$$

с начално условие $u(0) = 1$.

- Покажете, че точното решение на горната задача на Коши е

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{200t^3 + 1}}.$$

- Направете експерименти с методи на Рунге–Кута от трети и четвърти ред (вж. учебника) и с явния метод на Ойлер, за да установите каква стъпка h е необходима за всеки от тях, за да се постигне точност 10^{-6} . Сравнете времената за изпълнение на различните методи при тези стъпки (използвайте вградената функция `TimeUsed[]`).

- Повторете горните експерименти, така че да получите точност 10^{-1} . Какъв извод можете да направите за това кога е по-удачно да се използват методи от нисък и кога – от по-висок ред на точност?