# Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2019/2020 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .................................................. Факултетен № ........ Група: .....

| Задача | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Общо |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *получени точки* | | | | | | |
| *максимум точки* | *20* | *20* | *20* | *20* | *20* | *100* |

***Забележка 1:*** *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

***Забележка 2:*** *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

**Задача 1.** Докажете тъждеството

$$\left[\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots\right]^2=2^n.$$

**Задача 2.** Намерете броя на редиците, съставени от $a_1$ единици, $a_2$ двойки, ... , $a_n$ числа $n$, които удовлетворяват следните изисквания: за всяка двойка някъде вляво от нея има единица, за всяка тройка някъде вляво от нея има двойка, ... , за всяко $n$ някъде вляво от него има $n-1$.

**Задача 3.** Разглеждаме системата от автобусни линии в някакъв град. Известно е, че в града има поне две линии и всеки две линии имат точно една обща спирка. Между всеки две спирки може да се пътува без прекачване по точно една линия. На всяка линия има точно $n$ спирки, като $n \geq 2$. Колко са автобусните линии?

**Задача 4.** Нека $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... е редицата от простите числа. За всяко цяло положително $n$ означаваме с $\pi(n)$ броя на простите числа, ненадхвърлящи $n$. Разглеждаме формулата

$$\pi(n) = n - 1 + \pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) + \sum (-1)^k \left\lfloor \frac{n}{p_{j_1}\, p_{j_2} \,\ldots\, p_{j_k}} \right\rfloor,$$

където сумирането е по подмножествата $\left\{ j_1\,,\ j_2\,,\ \ldots\,,\ j_k \right\}$ на $\left\{ 1,\ 2,\ \ldots\,,\ \pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right) \right\}$ и $k$ се мени от 1 до $\pi\left(\lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)$.

а) Проверете формулата при $n = 120$. **(5 точки)**

б) Докажете формулата за всяко цяло положително $n$. **(15 точки)**

**Задача 5.** Точките с целочислени координати в равнината са оцветени с краен брой цветове. Докажете, че съществува правоъгълник с едноцветни върхове измежду тези точки.