ПРИЛОЖЕНИЯ НА РЕКУРЕНТНИТЕ УРАВНЕНИЯ

I. Приложения в комбинаториката

Задача 1. Колко n-цифрени цели положителни числа съдържат в десетичния си запис четен брой тройки (включително нито една) ?

Решение: Нека a_n е броят на n-цифрените цели положителни числа, чийто десетичен запис съдържа четен брой тройки. Според цифрата на единиците тези числа са два вида.

Първи случай: цифрата на единиците не е тройка. За тази цифра има девет възможности — 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Следователно числото, образувано от останалите $n-1$ цифри, съдържа четен брой тройки. За него има a_{n-1} възможности. Всяка от тези a_{n-1} възможности се комплектува с всяка от деветте възможности за последната цифра. От правилото за умножение следва, че броят на n-цифрените числа от първия вид е равен на $9\,a_{n-1}$.

Втори случай: цифрата на единиците е тройка. Следователно числото, образувано от останалите $n-1$ цифри, съдържа нечетен брой тройки. Броят на тези числа е равен на броя на всички числа с $n-1$ цифри минус броя на тези, които съдържат четен брой тройки, т.е. $\left(10^{n-1}-10^{n-2}\right)-a_{n-1}$. Умаляемото $10^{n-1}-10^{n-2}$ е броят на всички $(n-1)$-цифрени числа: от $1\underbrace{00\ldots000}_{n-2\text{ пъти}}$ до $\underbrace{999\ldots999}_{n-1\text{ пъти}}$.

Няма други възможности за цифрата на единиците. Прилагаме правилото за събиране:

$$a_n \;=\; 9\,a_{n-1} \;+\; \left(10^{n-1}-10^{n-2}\right) \;-\; a_{n-1}\,.$$

След преработка формулата приема вида

$$a_n \;=\; 8\,a_{n-1} \;+\; 0{,}09\;.\;10^n.$$

Това е линейно-рекурентно уравнение. Съответното му характеристично уравнение е

$$\lambda^n \;=\; 8\,\lambda^{n-1},$$

чийто единствен ненулев корен е $\lambda=8$. От свободния член идва още един корен: 10. Тогава

$$a_n \;=\; C_1\;.\;10^n \;+\; C_2\;.\;8^n.$$

Едноцифрените цели положителни числа с четен брой тройки са тези, които не съдържат тройка в десетичния си запис. Те са осем на брой (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9), следователно $a_1=8$. От рекурентното уравнение намираме

$$a_2 \;=\; 8\,a_1 \;+\; 0{,}09\,.\,10^2 \;=\; 8\;.\;8 \;+\; 9 \;=\; 73.$$

Във формулата с неопределените коефициенти заместваме $n=1$ и $n=2$:

$$\left|\begin{array}{rcl} 10\;C_1 \;+\; 8\;C_2 &=& 8 \\ 100\;C_1 \;+\; 64\;C_2 &=& 73. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение:

$$C_1 \;=\; \frac{9}{20}\;,\;\; C_2 \;=\; \frac{7}{16}\,.$$

Следователно $a_n \;=\; \dfrac{9\;.\;10^{n-1} \;+\; 7\;.\;8^{n-1}}{2}$ е броят на n-цифрените числа с четен брой тройки.

Задача 2. В турнир, провеждан по системата на елиминациите, участват n състезатели. В началото на турнира се тегли жребий за реда на провеждане на срещите. Ако a_n е броят на различните изходи от тегленето на жребия, намерете a_n като функция на n.

Например $a_1 = 1$, защото при един играч има само един начин за протичане на турнира: не се провеждат никакви срещи, а единственият претендент става шампион.

При двама играчи също има само един начин за провеждане на турнира (т.е. $a_2 = 1$): двамата играят един срещу друг и победителят става шампион.

При трима играчи има три начина за провеждане на турнира (т.е. $a_3 = 3$):
$\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ y , z \} , x \Big\}$, $\Big\{ \{ z , x \} , y \Big\}$. Например записът $\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$ означава, че първо x и y играят един срещу друг, после победителят играе със z. Записът $\Big\{ \{ y , x \} , z \Big\}$ има същия смисъл като $\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$.

При четирима играчи има петнайсет начина за провеждане на турнира (т.е. $a_4 = 15$):

$\Big\{ \{ \{ x , y \} , z \} , t \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ x , y \} , t \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ x , z \} , y \} , t \Big\}$,
$\Big\{ \{ \{ x , z \} , t \} , y \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ x , t \} , y \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ x , t \} , z \} , y \Big\}$,
$\Big\{ \{ \{ y , z \} , x \} , t \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ y , z \} , t \} , x \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ y , t \} , x \} , z \Big\}$,
$\Big\{ \{ \{ y , t \} , z \} , x \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ z , t \} , x \} , y \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ z , t \} , y \} , x \Big\}$,
$\Big\{ \{ x , y \} , \{ z , t \} \Big\}$, $\Big\{ \{ x , z \} , \{ y , t \} \Big\}$, $\Big\{ \{ x , t \} , \{ y , z \} \Big\}$.

Получава се редицата 1 , 1 , 3 , 15 $\ldots$ Търси се формула за общия член.

Решение: За $n-1$ играчи има общо a_{n-1} варианта. Да изберем по произволен начин един от тези варианти. По колко начина можем да добавим n-ти играч към избрания вариант?

В избрания вариант има $n-1$ "реални" играчи — участниците в турнира. За да остане един шампион, трябва да бъдат елиминирани $n-2$ играчи, т.е. трябва да бъдат проведени $n-2$ игри. Оттук получаваме още $n-2$ "играчи стойности" — победителите в игрите (разбира се, те са някои от "реалните" играчи). Това прави общо $(n-1)+(n-2) = 2n-3$ места, на които може да бъде добавен новият, n-тият играч: той може да играе с някой от старите $n-1$ играчи, преди последният да е играл изобщо (дотук има $n-1$ възможности), или може да играе с победителя от някоя от всичките $n-2$ срещи (това са още $n-2$ възможности).

Пример: Нека $n = 4$. От всеки вариант за трима играчи, да кажем $\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$, се получават $2n-3 = 5$ варианта за четирима играчи, защото новият, четвъртият играч t може да бъде вмъкнат на пет различни места:

— Играчът t може да играе с x, y или z, преди те да са играли с другиго. Това дава три нови варианта: $\Big\{ \{ \{ x , t \} , y \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ x , \{ y , t \} \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ x , y \} , \{ z , t \} \Big\}$.
— Играчът t може да играе с победителя от някоя от двете игри, което дава още два нови варианта: $\Big\{ \{ \{ x , y \} , t \} , z \Big\}$, $\Big\{ \{ \{ x , y \} , z \} , t \Big\}$.

Обратно, всеки от новите варианти се поражда от единствен стар вариант, а именно от стария вариант, който се получава, като изключим новия играч.

Пример: Нека $n = 4$ и новият играч е t. В този случай вариантът за четирима играчи $\Big\{ \{ \{ x , y \} , t \} , z \Big\}$ се получава единствено от варианта за трима играчи $\Big\{ \{ x , y \} , z \Big\}$.

Доказахме, че всеки вариант за $n-1$ играчи поражда $2n-3$ варианта за n играчи, а всеки вариант за n играчи се поражда от единствен вариант за $n-1$ играчи. Следователно $a_n = (2n-3)\, a_{n-1}$ за всяко естествено $n > 1$. Развиваме полученото рекурентно уравнение:

$$\begin{aligned} a_n &= (2n-3)\, a_{n-1} = (2n-3)(2n-5)\, a_{n-2} = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\, a_{n-3} = \\ &= (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ a_4 = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5\,.\,a_3 = \\ &= (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5\,.\,3\,.\,a_2 = (2n-3)(2n-5)(2n-7)\ \ldots\ 5\,.\,3\,.\,1. \end{aligned}$$

Значи, $a_n = 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ \ldots\ (2n-3)$ е произведението на първите $n-1$ нечетни числа. (При $n = 1$ произведението съдържа нула множителя, т.е. то е празно, а празното произведение се приема за равно на единица, т.е. $a_1 = 1$.) Формулата може да се запише и по още един, еквивалентен начин. За целта умножаваме и делим с четните числа 2 , 4 , 6 , 8 , $\ldots$, $2n-2$:

$$a_n = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ \ldots\ (2n-3)\,.\,(2n-2)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\ \ldots\ (2n-2)} = \frac{(2n-2)!}{(2\,.\,1)\,.\,(2\,.\,2)\,.\,(2\,.\,3)\ \ldots\ (2\,.\,(n-1))}\ , \quad \text{т.е.}$$

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\ 2^{n-1}}\ .$$

Отговор: $a_n = 1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ \ldots\ (2n-3) = \dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\ 2^{n-1}}$.

Задача 3. По колко начина числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$ могат да се наредят в редица така, че всеки член (без първия) да се различава с единица от някое от числата вляво от него?

Решение: Нека a_n е броят на редиците със свойството от условието на задачата. При $n = 1$ има една такава редица: (1). При $n = 2$ има две редици: $(1,\ 2)$ и $(2,\ 1)$. При $n = 3$ има четири редици: $(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$ и $(2,\ 3,\ 1)$.

Тези данни навеждат на мисълта, че $a_n = 2^{n-1}$. Ще докажем това предположение.

Нека L е първият (най-левият) член на редицата. Ако $L \neq 1$, то числото 2 се намира някъде вляво от 1. Ако $L \neq 2$, то числото 3 се намира някъде вляво от 2. И тъй нататък, докато стигнем до числото L, което е първият член на редицата.

Аналогично, ако $L \neq n$, то числото $n-1$ се намира някъде вляво от n. Ако $L \neq n-1$, то числото $n-2$ се намира някъде вляво от $n-1$. И тъй нататък, докато стигнем до числото L.

Значи всяко от числата $2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ ,\ n-3,\ n-2,\ n-1$ се намира вляво от 1 или от n. Следователно последното (най-дясното) число в редицата е или 1, или n.

Ако последното число е n, то останалите $n-1$ позиции могат да бъдат заети от числата $1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n-1$ по a_{n-1} начина, като се спазва изискването от условието.

Ако последното число е 1, то останалите $n-1$ позиции могат да бъдат заети от числата $2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ ,\ n$ също по a_{n-1} начина, защото, ако извадим единица от всички тях, ще дойдем до предишния случай (изваждането на едно и също число от всички елементи на подредицата не променя техните разлики, значи не нарушава изискванията на задачата).

Следователно $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$, тоест $a_n = 2a_{n-1}$. Оттук по индукция следва, че $a_n = 2^{n-1}$.

Задача 4. Нека т. O е центърът на правилния шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1. Освен страните на шестоъгълника са начертани още и отсечките, свързващи т. O с всеки от върховете. Така се получават общо дванайсет отсечки с дължина 1. Пресметнете броя на маршрутите с дължина n, всеки от които започва и завършва в т. O.

Решение: Ще използваме обозначенията от упътването.

Нека a_n е броят на маршрутите с дължина n, които започват и завършват в т. O. Ако първото ребро на такъв маршрут е OA, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. A до т. O; броят на тези маршрути е равен на b_{n-1}. Ако първото ребро е OB, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. B до т. O; поради симетрията между върховете на шестоъгълника броят на тези маршрути също е равен на b_{n-1}. Аналогично разсъждение важи за върховете C, D, E и F. От правилото за събиране следва, че $a_n = 6b_{n-1}$.

По същия начин намираме формула за b_n — броя на маршрутите с дължина n, които започват в т. A и завършват в т. O. Ако първото ребро на такъв маршрут е AO, то другите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. O до т. O; броят на тези маршрути е равен на a_{n-1}. Ако първото ребро е AB, то другите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. B до т. O; поради симетрията между върховете на шестоъгълника броят на тези маршрути е равен на b_{n-1}. Ако първото ребро е AF, то останалите $n-1$ ребра образуват маршрут с дължина $n-1$ от т. F до т. O; поради симетрията броят на тези маршрути също е b_{n-1}. От правилото за събиране получаваме уравнението $b_n = a_{n-1} + 2b_{n-1}$.

Двете рекурентни уравнения образуват система:

$$\left| \begin{aligned} a_n &= 6b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1}. \end{aligned} \right.$$

От първото уравнение изразяваме $b_{n-1} = \frac{1}{6}\, a_n$, следователно $b_n = \frac{1}{6}\, a_{n+1}$. Заместваме във второто уравнение и получаваме рекурентна зависимост, съдържаща само членовете на редицата, която ни интересува: $\frac{1}{6}\, a_{n+1} = a_{n-1} + \frac{2}{6}\, a_n$, тоест $a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$. Характеристичното уравнение $\lambda^2 = 2\lambda + 6$ има корени $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{7}$. Следователно $a_n = C_1 . \left(1+\sqrt{7}\right)^n + C_2 . \left(1-\sqrt{7}\right)^n$.

Чрез непосредствено преброяване намираме $a_1 = 0$, $a_2 = 6$. Заместваме n с 1 и с 2 във формулата с неопределените коефициенти и получаваме система от две линейни уравнения:

$$\left| \begin{aligned} C_1 . \left(1+\sqrt{7}\right) + C_2 . \left(1-\sqrt{7}\right) &= 0 \\ C_1 . \left(1+\sqrt{7}\right)^2 + C_2 . \left(1-\sqrt{7}\right)^2 &= 6. \end{aligned} \right.$$

Оттук намираме следните стойности на коефициентите: $C_1 = \frac{7-\sqrt{7}}{14}$, $C_2 = \frac{7+\sqrt{7}}{14}$.
Ето защо $a_n = \frac{7-\sqrt{7}}{14} . \left(1+\sqrt{7}\right)^n + \frac{7+\sqrt{7}}{14} . \left(1-\sqrt{7}\right)^n$, което може да се запише и по следния начин: $a_n = \dfrac{\left(7-\sqrt{7}\right) . \left(1+\sqrt{7}\right)^n + \left(7+\sqrt{7}\right) . \left(1-\sqrt{7}\right)^n}{14}$.

II. Приложения в други видове задачи

Задача 1. Разглеждаме следната функция, програмирана на езика Си:

```
unsigned int f(unsigned int n)
{
    unsigned int a = 4;
    for (unsigned int k = 1; k <= n; k++)
        a = 3 * a + 2;
    return a;
}
```

Намерете явна формула за върнатата стойност `f(n)`.

Решение: Да означим с $\mathtt{a}_{\mathtt{k}}$ стойността на променливата `a` след `k`-тата итерация на цикъла ($\mathtt{a}_0$ е началната стойност). Трасираме програмния код и получаваме първите няколко стойности:

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathtt{a}_{\mathtt{k}}$	4	14	44	134	404	1214	3644

Както се вижда от инструкцията в тялото на цикъла, тази редица удовлетворява нехомогенното линейно-рекурентно уравнение $\mathtt{a}_{\mathtt{k}} = 3\,\mathtt{a}_{\mathtt{k-1}} + 2$. С помощта на характеристично уравнение намираме $\mathtt{a}_{\mathtt{k}} = C_1 \,.\, 3^{\mathtt{k}} + C_2$. От $\mathtt{a}_0 = 4$ и $\mathtt{a}_1 = 14$ се получава системата

$$\left| \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 4 \\ 3C_1 + C_2 = 14 \end{array} \right.$$

с единствено решение $C_1 = 5$, $C_2 = -1$. Затова $\mathtt{a}_{\mathtt{k}} = 5 \,.\, 3^{\mathtt{k}} - 1$ за всяко цяло $\mathtt{k} \geq 0$.

От условието за край на цикъла се вижда, че функцията `f` връща следната стойност: $\mathtt{f(n)} = \mathtt{a}_{\mathtt{n}} = 5 \,.\, 3^{\mathtt{n}} - 1$.

Забележка: Разсъждения като проведените по-горе се използват често за оптимизиране на алгоритми. Формулата $\mathtt{f(n)} = 5 \,.\, 3^{\mathtt{n}} - 1$ представлява алгоритъм за изчисляване на `f(n)`, който връща същата стойност като първоначалния алгоритъм, но по-бързо (с по-малък брой аритметични операции). Степенуването в последната формула може да се извърши посредством последователно повдигане на квадрат, което дава брой на операциите от порядъка на $\log \mathtt{n}$, докато първоначалният алгоритъм изразходва време от порядъка на `n`.

Задача 2. Пресметнете детерминантата

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Решение: Развиваме детерминантата по първия стълб:

$$D_n = 7 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Детерминантата в първото събираемо е със същия строеж като D_n, но има един ред и един стълб по-малко, т.е. тя е D_{n-1}. Колкото до детерминантата във второто събираемо, тя може отново да бъде развита по ред или стълб. Удобно е да я развием по първия ред, тъй като той съдържа най-много нули:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 7 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 7 & 6 \\ 0 & \dots & 2 & 7 \end{vmatrix} = 6 \cdot D_{n-2}.$$

Получихме линейно-рекурентно уравнение без свободен член:

$$D_n = 7.D_{n-1} - 12.D_{n-2}\ , \qquad n = 3,\ 4,\ 5,\ \dots$$

Съответното му характеристично уравнение е $\lambda^n = 7\lambda^{n-1} - 12\lambda^{n-2}$. Делим на $\lambda^{n-2} \neq 0$ и получаваме квадратно уравнение: $\lambda^2 = 7\lambda - 12$, т.е. $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$, чиито корени са $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 4$. Следователно

$$D_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 4^n.$$

За намирането на C_1 и C_2 са нужни две уравнения, т.е. трябва да пресметнем D_1 и D_2. Очевидно $D_1 = 7$, $D_2 = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 37$.

Заместваме във формулата за общия член:

Заместваме $n = 1$: $D_1 = C_1 \cdot 3^1 + C_2 \cdot 4^1 = 3C_1 + 4C_2 = 7$.

Заместваме $n = 2$: $D_2 = C_1 \cdot 3^2 + C_2 \cdot 4^2 = 9C_1 + 16C_2 = 37$.

Решаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} 3C_1 + 4C_2 = 7 \\ 9C_1 + 16C_2 = 37 \end{array} \right.$$

и намираме $C_1 = -3$, $C_2 = 4$. Остава само да заместим намерените стойности във формулата за общия член. **Отг.** $D_n = 4^{n+1} - 3^{n+1}$.

Задача 3. Докажете, че числото $\left(4+\sqrt{7}\,\right)^{2015}+\left(4-\sqrt{7}\,\right)^{2015}$ е цяло, и намерете цифрата на единиците му.

Упътване: Представете това число като член на редица, зададена рекурентно.

Решение: Разглеждаме редицата $a_n=\left(4+\sqrt{7}\,\right)^n+\left(4-\sqrt{7}\,\right)^n$, $n\geq 0$. Първите два члена са $a_0=2$ и $a_1=8$. Чрез формулите на Виет съставяме квадратно уравнение с корени $4\pm\sqrt{7}$, а именно: $\lambda^2-8\lambda+9=0$, т.е. $\lambda^2=8\lambda-9$. То е характеристично за рекурентното уравнение $a_{n+2}=8a_{n+1}-9a_n$. От това уравнение и от началните условия по индукция следва, че всички членове на редицата $\left(\text{включително } a_{2015}\right)$ са цели числа.

Нека b_n е последната цифра в десетичния запис на числото a_n. Тогава b_n е цяло число от 0 до 9 включително, като $b_0=2$, $b_1=8$, $b_{n+2}\equiv 8b_{n+1}-9b_n \pmod{10}$ за $\forall n\geq 0$. Ясно е, че редицата $\left(b_n\right)$ ще бъде периодична, стига два от нейните членове да се повторят в същия ред. Това непременно ще се случи, тъй като за наредените двойки от десетични цифри има краен брой различни възможности (точно 100). Следователно редицата $\left(b_n\right)$ е периодична и периодът ѝ не надвхърля 100. Конкретната дължина на периода се намира чрез опитване.
b_n : **2**, **8**, 6, 6, 4, 8, 8, 2, 4, 4, 6, 2, **2**, **8** ...
Понеже $b_0=b_{12}=2$ и $b_1=b_{13}=8$, то редицата $\left(b_n\right)$ има период 12. Тъй като $2015:12=167$ и остатък 11, то търсената цифра е $b_{2015}=b_{11}=2$.

Задача 4. Докажете, че уравнението $11x^2-7y^2=71$ притежава безброй много решения в цели положителни числа.

Решение: Налучкваме решението $x_0=3$, $y_0=2$. Определяме две редици $\left(x_n\right)$ и $\left(y_n\right)$:

$$x_0=3,\quad y_0=2,\quad x_{n+1}=351x_n+280y_n,\quad y_{n+1}=440x_n+351y_n \quad \text{за всяко цяло } n\geq 0.$$

Първите членове на редиците са цели положителни числа. Следващите членове се получават чрез събиране и умножение с 280, 351 и 440, затова и те са цели положителни числа. Ето защо $x_{n+1}>x_n$ и $y_{n+1}>y_n$, т.е. двете редици са строго растящи. Оттук можем да направим извода, че наредените двойки $\left(x_n\,,\,y_n\right)$ са две по две различни, следователно са безброй много. Всички те са решения на уравнението $11x^2-7y^2=71$, тоест то има безброй много решения.

И тъй, искаме да докажем, че $11\left(x_n\right)^2-7\left(y_n\right)^2=71$ за всяко цяло неотрицателно число n. За целта ще използваме математическа индукция.

База: $n=0$. Проверяваме: $11\left(x_0\right)^2-7\left(y_0\right)^2=11\,.\,3^2-7\,.\,2^2=99-28=71$.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че $11\left(x_n\right)^2-7\left(y_n\right)^2=71$ за някое цяло $n\geq 0$. Ще докажем, че $11\left(x_{n+1}\right)^2-7\left(y_{n+1}\right)^2=71$. Наистина,

$$11\left(x_{n+1}\right)^2-7\left(y_{n+1}\right)^2=11\left(351x_n+280y_n\right)^2-7\left(440x_n+351y_n\right)^2=$$

$$=\left(1355211\left(x_n\right)^2+2162160\,x_n\,y_n+862400\left(y_n\right)^2\right)-\left(1355200\left(x_n\right)^2+2162160\,x_n\,y_n+862407\left(y_n\right)^2\right)$$

$=11\left(x_n\right)^2-7\left(y_n\right)^2=71$. В последното равенство използвахме индуктивното предположение.

Как се сетихме да разгледаме тези редици? Идеята за редица от решения изисква хрумване. Че двете редици се задават тъкмо с линейно-рекурентни уравнения, може да се налучка. Във всеки случай това е най-естественото предположение: отначало търсим просто решение; ако не успеем да намерим такова, чак тогава се насочваме към търсене на по-сложно решение. Неправдоподобно е обаче да налучкаме и коефициентите на двете рекурентни уравнения. Коефициентите се намират като решения на подходяща система.

Нека

$$x_{n+1} = ax_n + by_n\,, \quad y_{n+1} = cx_n + dy_n \quad \text{за всяко цяло } n \geq 0.$$

Тогава

$$11\left(x_{n+1}\right)^2 - 7\left(y_{n+1}\right)^2 = 11\left(ax_n + by_n\right)^2 - 7\left(cx_n + dy_n\right)^2 =$$

$$= \left(11a^2\left(x_n\right)^2 + 22ab\,x_n\,y_n + 11b^2\left(y_n\right)^2\right) - \left(7c^2\left(x_n\right)^2 + 14cd\,x_n\,y_n + 7d^2\left(y_n\right)^2\right) =$$

$$= \left(11a^2 - 7c^2\right)\left(x_n\right)^2 + \left(22ab - 14cd\right)x_n\,y_n + \left(11b^2 - 7d^2\right)\left(y_n\right)^2.$$

Искаме да бъде изпълнено равенството

$$11\left(x_{n+1}\right)^2 - 7\left(y_{n+1}\right)^2 = 11\left(x_n\right)^2 - 7\left(y_n\right)^2,$$

за да можем да заключим по индукция, че всички тези изрази са равни на 71. За тази цел е нужно коефициентите пред съответните степени да бъдат равни. Тоест неизвестните a, b, c и d трябва да бъдат цели положителни числа и да удовлетворяват системата

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 11a^2 & - & 7c^2 & = & 11 \\ 11b^2 & - & 7d^2 & = & -7 \\ 22ab & - & 14cd & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} a^2 = 1 + \dfrac{7c^2}{11} \\ 7d^2 - 11b^2 = 7 \\ 11ab = 7cd. \end{array}\right.$$

Не е нужно да намерим всички решения на тази система. Достатъчно е едно решение.

От първото уравнение следва, че c се дели на 11. Опитваме с малки числа: 11, 22, 33 и т.н. При $c = 11$ получаваме $a^2 = 78$, което няма решение в цели числа: 78 не е точен квадрат. Чак при $c = 440$ получаваме $a^2 = 123201$, откъдето намираме цяло положително решение: $a = 351$. (Търсенето можем да извършим с компютърна програма или с електронна таблица.)

Заместваме намерените стойности на a и c в третото уравнение и то приема вида

$$11\,.\,351b = 7\,.\,440d \iff 351b = 280d.$$

Тъй като числата 351 и 280 са взаимно прости, то b се дели на 280, а d се дели на 351, тоест

$$b = 280k, \quad d = 351k$$

за някое цяло положително число k. Заместваме във второто уравнение на последната система:

$$7\,.\,351^2\,k^2 - 11\,.\,280^2\,k^2 = 7 \iff 7k^2 = 7 \iff k^2 = 1,$$

откъдето намираме положителното целочислено решение $k = 1$, $b = 280$, $d = 351$.

Ако за неизвестното k не се беше получила цяла положителна стойност, щяхме да се върнем на първата стъпка и да опитаме с по-голяма стойност на c, докато открием подходяща.

С аналитични преобразувания и опитване намерихме целочислени положителни стойности на неизвестните коефициенти: $a = 351$, $b = 280$, $c = 440$, $d = 351$. Те бяха използвани в доказателството от предишната страница.

Задача 5. Намерете всички функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяващи функционалното уравнение

$$f(f(x)) = 21x - 4f(x).$$

Решение: Избираме произволно число $a_0 \in \mathbb{N}$ и разглеждаме следната безкрайна редица:

$$a_0 \ , \ a_1 = f\left(a_0\right) \ , \ a_2 = f\left(f\left(a_0\right)\right) \ , \ \ldots \ , \ a_n = \underbrace{f\left(f\left(\ldots\left(f\right.\right.\right.}_{n \text{ пъти}}\left.\left.\left.\left(a_0\right)\right)\ldots\right)\right) \ , \ \ldots$$

Във функционалното уравнение

$$f(f(x)) = 21x - 4f(x)$$

заместваме $x = a_n$:

$$f\left(f\left(a_n\right)\right) = 21\,a_n - 4f\left(a_n\right).$$

Преработваме новото уравнение:

$$f\left(a_{n+1}\right) = 21\,a_n - 4\,a_{n+1}\,,$$

$$a_{n+2} = 21\,a_n - 4\,a_{n+1}\,.$$

На полученото линейно-рекурентно уравнение съответства следното характеристично уравнение:

$$\lambda^{n+2} = 21\,\lambda^n - 4\,\lambda^{n+1}\,.$$

Тъй като търсим само ненулевите корени, делим на λ^n:

$$\lambda^2 + 4\,\lambda - 21 = 0.$$

Корените на това квадратно уравнение са $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = -7$. Следователно

$$a_n = C_1\,.\,3^n + C_2\,.\,(-7)^n.$$

Понеже функцията $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ приема само цели неотрицателни стойности, то следва, че a_n е цяло неотрицателно число за всяко цяло $n \geq 1$. Тъй като $|-7| > |3|$, то за всички достатъчно големи n знакът на числото a_n съвпада със знака на събираемото $C_2\,.\,(-7)^n$, при условие че $C_2 \neq 0$. Строгото доказателство следва от представянето

$$a_n = C_2\,.\,(-7)^n\,.\,\left(1 + \frac{C_1}{C_2}\,.\,\left(-\frac{3}{7}\right)^n\right).$$

Тъй като $\left|-\dfrac{3}{7}\right| < 1$, то $\left(-\dfrac{3}{7}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$, изразът в големите скоби клони към 1 и

$$a_n \approx C_2\,.\,(-7)^n \text{ за всички достатъчно големи } n.$$

Следователно, ако $C_2 > 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи нечетни n; а пък ако $C_2 < 0$, то $a_n < 0$ за всички достатъчно големи четни n. И в двата случая се стига до противоречие с това, че всички a_n са неотрицателни.

Остава само една възможност: $C_2 = 0$. Тогава

$$a_n = C_1\,.\,3^n.$$

При $n = 0$ намираме $C_1 = a_0$. При $n = 1$ следва $a_1 = 3\,C_1$, т.е. $f\left(a_0\right) = 3\,a_0$. Понеже a_0 е произволно число от $\mathbb{N}$, то $f(x) = 3x$ за всяко $x \in \mathbb{N}$. Проверката показва, че тази функция наистина е решение на функционалното уравнение. Проверката е задължителна, тъй като рекурентното уравнение е следствие от функционалното (двете уравнения не са равносилни).

Отговор: $f(x) = 3x,\ \forall x \in \mathbb{N}$.