Домашно № 3 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2019/2020 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	**1**	**2**	**3**	**4**	Общо
получени точки					
максимум точки	*20*	*20*	*40*	*20*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

По задачите № 1, 2 и 4 се приемат <u>само</u> решения чрез рекурентни уравнения!

Задача 1. Редицата (a_n) е определена по следния начин:

$$a_0 = \frac{5}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^2 - 2 \text{ за всяко цяло неотрицателно } n.$$

Да се докаже, че $\lfloor a_n \rfloor$ е точна степен на двойката за всяко цяло неотрицателно n.

Задача 2. Докажете, че уравнението

$$3x^2 - 2y^2 = 1$$

има безброй много решения в цели положителни числа.

Задача 3. Да се докаже, че числото $\left\lfloor \left(2 + \sqrt{3}\right)^n \right\rfloor$ е нечетно за всяко цяло неотрицателно n.
Задачата да се реши по два начина:

а) с рекурентно уравнение; **(20 точки)**

б) с биномната формула. **(20 точки)**

Задача 4. Колко са пермутациите без повторение $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числата $1, 2, \ldots, n$, удовлетворяващи неравенствата $k-1 \leq a_k \leq k+1$ за всяко цяло k от 1 до n включително?

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Пресмятаме първите няколко члена на редицата:

$$a_0 = \frac{5}{2} = 2\,\frac{1}{2}\ , \quad a_1 = \frac{17}{4} = 4\,\frac{1}{4}\ , \quad a_2 = \frac{257}{16} = 16\,\frac{1}{16}\ , \quad \dots$$

Тези стойности навеждат на мисълта, че

$$a_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n} \quad \text{за всяко цяло неотрицателно } n.$$

Формулата може да се докаже с помощта на математическа индукция.

База: $n = 0$. Проверяваме: $2^{2^0} + 2^{-2^0} = 2^1 + 2^{-1} = 2\,\frac{1}{2} = a_0$.

Индуктивна стъпка: Нека $a_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n}$ за някое цяло неотрицателно n. Тогава

$$a_{n+1} = (a_n)^2 - 2 = \left(2^{2^n} + 2^{-2^n}\right)^2 - 2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + \left(2^{-2^n}\right)^2 + 2\ .\ 2^{2^n} .\ 2^{-2^n} - 2 =$$

$$= 2^{2^n\,.\,2} + 2^{-2^n\,.\,2} + 2^{1+2^n-2^n} - 2 = 2^{2^{n+1}} + 2^{-2^{n+1}} + 2^1 - 2 = 2^{2^{n+1}} + 2^{-2^{n+1}}\ , \quad \text{т.е.}$$

$$a_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 2^{-2^{n+1}}\ .$$

В току-що доказаната формула $a_n = 2^{2^n} + 2^{-2^n}$ първото събираемо е цяло число, докато второто събираемо е между 0 и 1. Ето защо първото събираемо е цялата част на общия член, тоест $\lfloor a_n \rfloor = 2^{2^n}$, което е точна степен на двойката.

Задача 2. Определяме две редици (x_n) и (y_n) чрез следните формули:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1, \quad x_{n+1} = 5x_n + 4y_n\ , \quad y_{n+1} = 6x_n + 5y_n \quad \text{за всяко цяло } n \geq 0.$$

Първите членове на редиците са цели положителни числа. Следващите членове се получават чрез събиране и умножение с 4, 5 и 6, затова и те са цели положителни числа. Следователно $x_{n+1} > x_n$ и $y_{n+1} > y_n$, т.е. двете редици са строго растящи. Оттук можем да направим извода, че наредените двойки $(x_n\,,\,y_n)$ са две по две различни, следователно са безброй много.

Ще докажем, че всяка от тези наредени двойки е решение на уравнението $3x^2 - 2y^2 = 1$, откъдето следва, че то има безброй много решения.

И тъй, искаме да докажем, че $3(x_n)^2 - 2(y_n)^2 = 1$ за всяко цяло неотрицателно число n. За целта ще използваме математическа индукция.

База: $n = 0$. Проверяваме: $3(x_0)^2 - 2(y_0)^2 = 3\,.\,1^2 - 2\,.\,1^2 = 3 - 2 = 1$.

Индуктивна стъпка: Да предположим, че $3(x_n)^2 - 2(y_n)^2 = 1$ за някое цяло $n \geq 0$. Ще докажем, че $3(x_{n+1})^2 - 2(y_{n+1})^2 = 1$. Наистина,

$$3(x_{n+1})^2 - 2(y_{n+1})^2 = 3(5x_n + 4y_n)^2 - 2(6x_n + 5y_n)^2 =$$

$$= \left(75(x_n)^2 + 120\,x_n\,y_n + 48(y_n)^2\right) - \left(72(x_n)^2 + 120\,x_n\,y_n + 50(y_n)^2\right) = 3(x_n)^2 - 2(y_n)^2 = 1.$$

Как се сетихме да разгледаме тези редици? Идеята за редица от решения изисква хрумване. Че двете редици се задават тъкмо с линейно-рекурентни уравнения, може да се налучка. Във всеки случай това е най-естественото предположение: отначало търсим просто решение; ако не успеем да намерим такова, чак тогава се насочваме към търсене на по-сложно решение. Неправдоподобно е обаче да налучкаме и коефициентите на двете рекурентни уравнения. Коефициентите се намират като решения на подходяща система.

Нека

$$x_{n+1} = ax_n + by_n\,, \quad y_{n+1} = cx_n + dy_n \quad \text{за всяко цяло } n \geq 0.$$

Тогава

$$3\left(x_{n+1}\right)^2 - 2\left(y_{n+1}\right)^2 = 3\left(ax_n + by_n\right)^2 - 2\left(cx_n + dy_n\right)^2 =$$

$$= \Big(3a^2\left(x_n\right)^2 + 6ab\,x_n\,y_n + 3b^2\left(y_n\right)^2\Big) - \Big(2c^2\left(x_n\right)^2 + 4cd\,x_n\,y_n + 2d^2\left(y_n\right)^2\Big) =$$

$$= \Big(3a^2 - 2c^2\Big)\left(x_n\right)^2 + \Big(6ab - 4cd\Big)\,x_n\,y_n + \Big(3b^2 - 2d^2\Big)\left(y_n\right)^2.$$

Искаме да бъде изпълнено равенството

$$3\left(x_{n+1}\right)^2 - 2\left(y_{n+1}\right)^2 = 3\left(x_n\right)^2 - 2\left(y_n\right)^2,$$

за да можем да заключим по индукция, че всички тези изрази са равни на единица. За тази цел е нужно коефициентите пред съответните степени да бъдат равни. Тоест неизвестните a, b, c и d трябва да бъдат цели положителни числа и да удовлетворяват системата

$$\left|\begin{array}{rcrcr} 3a^2 & - & 2c^2 & = & 3 \\ 3b^2 & - & 2d^2 & = & -2 \\ 6ab & - & 4cd & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left|\begin{array}{l} a^2 = 1 + \dfrac{2c^2}{3} \\ 2d^2 - 3b^2 = 2 \\ 3ab = 2cd. \end{array}\right.$$

Не е нужно да намерим всички решения на тази система. Достатъчно е едно решение.

От първото уравнение следва, че c се дели на 3. Опитваме с малки числа: 3, 6, 9 и т.н. При $c = 3$ получаваме $a^2 = 7$, което няма целочислено решение, защото 7 не е точен квадрат. При $c = 6$ получаваме $a^2 = 25$, откъдето намираме положително целочислено решение: $a = 5$.

Заместваме намерените стойности на a и c в третото уравнение и то приема вида

$$15b = 12d \iff 5b = 4d.$$

Тъй като числата 4 и 5 са взаимно прости, то b се дели на 4, а d се дели на 5, тоест

$$b = 4k, \quad d = 5k$$

за някое цяло положително число k. Заместваме във второто уравнение на последната система:

$$50k^2 - 48k^2 = 2 \iff 2k^2 = 2 \iff k^2 = 1,$$

откъдето намираме положителното целочислено решение $k = 1, \quad b = 4, \quad d = 5.$

Ако за неизвестното k не се беше получила цяла положителна стойност, щяхме да се върнем на първата стъпка и да опитаме с по-голяма стойност на c: 9, 12, 15, 18, 21 и тъй нататък, докато открием подходяща.

С аналитични преобразувания и опитване намерихме целочислени положителни стойности на неизвестните коефициенти: $a = 5, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad d = 5.$ Тъкмо те бяха използвани в доказателството от предишната страница.

Задача 3. Разглеждаме редицата с общ член

$$a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Числата $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ са корени на квадратно уравнение, чиито коефициенти се получават по формулите на Виет:

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \iff x^2 = 4x - 1 \iff x^n = 4x^{n-1} - x^{n-2}$$

(като последната еквивалентност важи при $x \neq 0$). Последното уравнение е характеристично за следното линейно-рекурентно уравнение:

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} \quad \text{за всяко цяло } n \geq 2.$$

Първите два члена на редицата намираме от нейното определение: $a_0 = 2$, $a_1 = 4$. Оттук и от рекурентното уравнение следва по индукция, че всички членове на редицата са четни числа. От друга страна, според определението на редицата е в сила равенството

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n,$$

в което a_n е цяло (четно) число, а пък $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ е между 0 и 1. Следователно

$$\left\lfloor \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor = a_n - 1,$$

което е нечетно число.

Задачата може да се реши по друг начин — с помощта на биномната формула на Нютон:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 y^n.$$

Заместваме $x = 2$, $y = \pm\sqrt{3}$, като групираме поотделно четните и нечетните степени на $\sqrt{3}$:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = A + B\sqrt{3}, \qquad \left(2-\sqrt{3}\right)^n = A - B\sqrt{3},$$

където A и B са цели числа:

$$A = \binom{n}{0} 2^n 3^0 + \binom{n}{2} 2^{n-2} 3^1 + \binom{n}{4} 2^{n-4} 3^2 + \cdots$$

$$B = \binom{n}{1} 2^{n-1} 3^0 + \binom{n}{3} 2^{n-3} 3^1 + \binom{n}{5} 2^{n-5} 3^2 + \cdots$$

Следователно

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2A,$$

тоест

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n = 2A - \left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Понеже числото $\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ лежи между 0 и 1, то цялата част на лявата страна е равна на

$$\left\lfloor \left(2+\sqrt{3}\right)^n \right\rfloor = 2A - 1,$$

което е нечетно число.

Задача 4. При $k = n$ неравенството приема вида $n - 1 \leq a_n \leq n + 1$, тоест a_n е някое от числата n и $n - 1$. Нека b_n е търсеният брой пермутации. Както видяхме, те са два вида:

— Първият вид са тези пермутации, за които $a_n = n$. Останалите членове образуват пермутация на числата $1,\ 2,\ \dots\ ,\ n-1$, удовлетворяваща изискването от условието на задачата. Следователно броят на тези пермутации е равен на b_{n-1}.

— За втория вид пермутации важи $a_n = n - 1$. Понеже $a_k \leq k + 1 < n$ при $k < n - 1$, числото n със сигурност е на място № $n - 1$, т.е. $a_{n-1} = n$. Останалите членове образуват пермутация на числата $1,\ 2,\ \dots\ ,\ n-2$, удовлетворяваща изискването от условието на задачата. Следователно броят на тези пермутации е равен на b_{n-2}.

Общият брой пермутации от двата вида е равен на

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\,.$$

Непосредствено преброяваме, че $b_1 = 1$, $b_2 = 2$. Получава се редицата от числата на Фибоначи, само че в началото има една единица вместо две: $1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55 \dots$

С помощта на характеристично уравнение намираме формулата за общия член:

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$