Задача 1. Докажете или опровергайте, че съществува граф G с 51 върха, такъв че G и $\overline{G}$ са изоморфни.

Решение. Твърдението не е вярно. За да са изоморфни два графа, трябва да имат еднакъв брой ребра. Това е необходимо, без да е достатъчно, условие за изоморфизъм. В случая това необходимо условие е $|E(G)| = |E(\overline{G})|$.

Пълният граф на 51 върха, който наричаме накратко K_{51}, игнорирайки имената на върховете, има точно

$$\binom{51}{2} = 1275$$

ребра. За всеки граф G на 51 върха е вярно, че $E(G)$ и $E(\overline{G})$ задават разбиване на $E(K_{51})$ на два дяла, от което следва, че $|E(G)| + |E(\overline{G})| = 1275$ съгласно комбинаторния принцип на разбиването.

Но 1275 е нечетно число, а и $|E(G)|$, и $|E(\overline{G})|$ са цели числа. Очевидно няма как сумата от две равни цели числа да е нечетно число.

Задача 2. Докажете, че за всяко $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n},$$

където F_i означава i-тото число на Фибоначи за всяко i. Числата на Фибоначи се дефинират така:

$$F_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0; \\ 1, & \text{ако } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & \text{ако } n > 1. \end{cases}$$

Решение. По определение за всяко $n > 0$ е вярно, че

$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2}. \tag{1}$$

Използвайки това, че

$$F_{2n-1} = F_{2n-2} + F_{2n-3},$$
$$F_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-4},$$

получаваме от (1) следното уравнение:

$$F_{2n} = F_{2n-2} + 2F_{2n-3} + F_{2n-4}, \tag{2}$$

Използвайки това, че

$$F_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-4},$$
$$F_{2n-3} = F_{2n-4} + F_{2n-5},$$
$$F_{2n-4} = F_{2n-5} + F_{2n-6},$$

получаваме от (2) следното уравнение:

$$F_{2n} = F_{2n-3} + 3F_{2n-4} + 3F_{2n-5} + F_{2n-6} \tag{3}$$

Да препишем (1), (2) и (3) така:

$$F_{2n} = \binom{1}{0}F_{2n-1} + \binom{1}{1}F_{2n-2}$$
$$F_{2n} = \binom{2}{0}F_{2n-2} + \binom{2}{1}F_{2n-3} + \binom{2}{2}F_{2n-4}$$
$$F_{2n} = \binom{3}{0}F_{2n-3} + \binom{3}{1}F_{2n-4} + \binom{3}{2}F_{2n-5} + \binom{3}{3}F_{2n-6}$$

Виждаме ясен шаблон. За всяко $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е вярно, че

$$F_{2n} = \binom{m}{0} F_{2n-m-0} + \binom{m}{1} F_{2n-m-1} + \binom{m}{2} F_{2n-m-2} + \cdots + \binom{m}{m-1} F_{2n-m-(m-1)} + \binom{m}{m} F_{2n-m-m} \quad (4)$$

Което, написано кратко, е

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} F_{2n-m-k} \quad (5)$$

Уравнението, което трябва да докажем, е частен случай на (5) за $m = n$.

Разбира се, за пълен брой точки трябва да докажем (4) строго. Този резултат се доказва лесно по индукция по m, по отношение на някакво фиксирано n, като обаче m взема стойности от **крайното** множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Базата е $m = 1$. Тогава (4) става (1) ✓.

Индуктивното предположение е (4) за някакво $m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Използвайки факта, че

$$\begin{aligned}
F_{2n-m} &= F_{2n-m-1} + F_{2n-m-2} = F_{2n-(m+1)} + F_{2n-(m+1)-1} \\
F_{2n-m-1} &= F_{2n-m-2} + F_{2n-m-3} = F_{2n-(m+1)-1} + F_{2n-(m+1)-2} \\
F_{2n-m-2} &= F_{2n-m-3} + F_{2n-m-4} = F_{2n-(m+1)-2} + F_{2n-(m+1)-3} \\
&\cdots \\
F_{2n-2m+1} &= F_{2n-2m} + F_{2n-2m-1} = F_{2n-(m+1)-(m-1)} + F_{2n-(m+1)-m} \\
F_{2n-2m} &= F_{2n-2m-1} + F_{2n-2m-2} = F_{2n-(m+1)-m} + F_{2n-(m+1)-(m+1)},
\end{aligned}$$

преписваме (4) така:

$$\begin{aligned}
F_{2n} = &\binom{m}{0}\left(F_{2n-(m+1)} + F_{2n-(m+1)-1}\right) + \binom{m}{1}\left(F_{2n-(m+1)-1} + F_{2n-(m+1)-2}\right) + \binom{m}{2}\left(F_{2n-(m+1)-2} + F_{2n-(m+1)-3}\right) + \cdots + \\
&\binom{m}{m-1}\left(F_{2n-(m+1)-(m-1)} + F_{2n-(m+1)-m}\right) + \binom{m}{m}\left(F_{2n-(m+1)-m} + F_{2n-(m+1)-(m+1)}\right) \quad (6)
\end{aligned}$$

Дясната страна е сума от $m+1$ събираеми, всяко от които е произведение от биномен коефициент и сума от две числа на Фибоначи. Нещо повече, дясното число на Фибоначи (в реда, в който са написани тук) от първото събираемо е равно на лявото число на Фибоначи от второто събираемо, дясното число на Фибоначи от второто събираемо е равно на лявото число на Фибоначи от третото събираемо и така нататък, дясното число на Фибоначи от m-тото събираемо е равно на лявото число на Фибоначи от $(m+1)$-вото събираемо. Преписваме (7), групирайки по едни и същи числа на Фибоначи, и получаваме сума от $m+2$ събираеми:

$$\begin{aligned}
F_{2n} = &\binom{m}{0} F_{2n-(m+1)} + F_{2n-(m+1)-1}\left(\binom{m}{0} + \binom{m}{1}\right) + F_{2n-(m+1)-2}\left(\binom{m}{1} + \binom{m}{2}\right) + \cdots + \\
&+ F_{2n-(m+1)-m}\left(\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m}\right) + \binom{m}{m} F_{2n-(m+1)-(m+1)} \quad (7)
\end{aligned}$$

Но от лекции знаем, че $\binom{p-1}{q-1} + \binom{p-1}{q} = \binom{p}{q}$, така че

$$\begin{aligned}
\binom{m}{0} + \binom{m}{1} &= \binom{m+1}{1} \\
\binom{m}{1} + \binom{m}{2} &= \binom{m+1}{2} \\
&\cdots \\
\binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} &= \binom{m+1}{m}
\end{aligned}$$

Затова преписваме (7) така:

$$F_{2n} = \binom{m}{0} F_{2n-(m+1)} + \binom{m+1}{1} F_{2n-(m+1)-1} + \binom{m+1}{2} F_{2n-(m+1)-2} + \cdots + \binom{m+1}{m} + F_{2n-(m+1)-m} + \binom{m}{m} F_{2n-(m+1)-(m+1)} \quad (8)$$

Забелязваме, че $\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0}$ и $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$, и преписваме (8) така:

$$F_{2n} = \binom{m+1}{0} F_{2n-(m+1)} + \binom{m+1}{1} F_{2n-(m+1)-1} + \binom{m+1}{2} F_{2n-(m+1)-2} + \cdots + \binom{m+1}{m} + F_{2n-(m+1)-m} + \binom{m+1}{m+1} F_{2n-(m+1)-(m+1)} \quad (9)$$

Но това е точно (4) след заместване на m с $m+1$.

Задача 3. Нека n и k са естествени числа и $k \leq n$. Разпределяме n студенти в k учебни зали така, че всеки студент да бъде разпределен в точно една зала и във всяка зала да има поне един студент. Докажете, че броят на възможните разпределения е равен на $\sum\limits_{r=0}^{k} \binom{k}{r} r^n (-1)^{k-r}$.

Решение. Това е точно формулата за броя на сюрекциите от n-елементен домейн в k-елементен кодомейн:

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^k \binom{k}{r} (k-r)^n$$

след заместване на k с $k-r$. Използваме известния факт, че $\binom{k}{r} = \binom{k}{k-r}$. Формулата за броя на сюрекциите е изведена подробно на лекции.

Задача 4. Докажете или опровергайте, че логическият съюз **импликация** притежава свойството асоциативност.

Решение. Импликацията не е асоциативна, понеже съжденията $(p \to q) \to r$ и $p \to (q \to r)$ не са еквивалентни. Ето доказателство на това с табличния метод. Тъй като те са съставни съждения, в които участват едни и същи прости съждения, достатъчно е да проверим дали колоните им съвпадат. А те не съвпадат.

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Задача 5. $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ е множество от булеви променливи.

а) Дайте определение на *дизюнктивна нормална форма*. **(2 точки)**

Колко дизюнктивни нормални форми има над множеството X? **(8 точки)**

б) Дайте определение на *съвършена дизюнктивна нормална форма*. **(2 точки)**

Колко съвършени дизюнктивни нормални форми има над X? **(8 точки)**

Решение. Нека е дадено крайно множество от булеви променливи $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Литерал* е всяко име на променлива или име на променлива с черта отгоре. *Конюнктивна клауза* е непразна конкатенация от литерали на две по две различни променливи. *Съществено различни конюнктивни клаузи* са всеки две конюнктивни клаузи, такива че едната не е пермутация на другата; с други думи, поне едната има поне един литерал, който не се среща в другата. *Пълна конюнктивна клауза* е конюнктивна клауза, в която се среща (точно един) литерал на всяка променлива от X. Въвеждаме и някаква линейна наредба върху клаузите, например лексикографска наредба, в която по-късите са преди по-дългите, а в клаузите с еднаква дължина търсим най-лявата позиция, в която литералите се различават; ако в първата клауза литералът е на променлива x_i, а във втората — на x_j, $i < j$, то първата клауза предхожда втората; ако и в двете клаузи литералът е на една и съща променлива, предхожда тази клауза, в която литералът е без черта.

Дизюнктивна нормална форма е конкатенация от една или повече съществено различни конюнктивни клаузи, разделени с буквата "$\vee$". По-прецизно казано, при дадени една или повече, две по две съществено различни, подредени конюнктивни клаузи $d_1, \ldots, d_m$, ДНФ над тях е низът

$$d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_m$$

Съвършена конюнктивна нормална форма е конкатенация от една или повече съществено различни пълни конюнктивни клаузи, разделени с буквата "$\vee$". По-прецизно казано, при дадени една или повече, две по две съществено различни, подредени пълни конюнктивни клаузи $d_1, \ldots, d_m$, СъвДНФ над тях е низът

$$d_1 \vee d_2 \vee \cdots \vee d_m$$

Това са синтактичните определения, които са напълно достатъчни за решението на задачата. Не е необходимо да се дефинира семантиката на такава формула. А семантиката е следната. Ако е дадена ДНФ, съвършена или не, нейната семантика е функцията обобщена дизюнкция на семантиките на участващите конюнктивни клаузи. На свой ред семантиката на всяка конюнктивна клауза е функцията обобщена конюнкция от семантиките на участващите литерали. На свой ред семантиката на всеки литерал α е следната: ако α е от вида x_i (име на променлива), неговата семантика е x_i (самата променлива, а не името; това са принципно различни неща!), а ако α е от вида $\overline{x_i}$, нейната семантика е функцията отрицание на променливата x_i.

Броят на ДНФ е $2^{3^n-1}-1$. Това е извеждано на лекции: броят на конюнктивните клаузи е точно 3^n-1, защото има очевидна биекция между тях и множеството от тернарни низове с дължина n без празния низ. Всяка конюнктивна клауза може да участва или да не участва в дизюнктивната нормална форма, откъдето идва експонентата с основа 2, но трябва да участва поне една конюнктивна клауза, заради което махаме низа от нула конюнктивни клаузи и вадим една единица след 2^{3^n-1}.

Броят на СъвДНФ е $2^{2^n}-1$. Всички пълни конюнктивни клаузи са точно 2^n, защото във всяка от тях участва всяка променлива по точно един от двата начина "без черта" или "с черта". Множеството от всички СъвДНФ е степенното множество на множеството от пълните конюнктивни клаузи, но без празното множество, заради което вадим единица.

Задача 6. Химик разполага с n вещества, които умее да превръща едно в друго с химични реакции. За всяко $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ е дадено $T(i, j)$: броят на начините за пряко превръщане на i-тото в j-тото вещество, където $T(i, j) \in \mathbb{N}^+$. Всички числа $T(i, j)$ се смятат за **дадени**.

Пряко превръщане означава превръщане, осъществено с помощта на точно **една** химична реакция. Съществуват обаче и косвени превръщания, всяко от които е поредица от **две или повече** химични реакции: едно вещество се превръща в друго с пряко превръщане, то се превръща в трето с пряко превръщане и така нататък до получаване на желаното крайно вещество.

Забележете, че при тези условия е възможно едно вещество да бъде превръщано в себе си, при това по няколко начина. Нещо повече: ако превърнем i-тото вещество в самото него и после пак превърнем i-тото вещество в самото него, това е косвено превръщане с две междинни реакции.

Отговорете на следния въпрос. При дадени ℓ и m, където $\ell, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, по колко начина можем да превърнем вещество номер ℓ във вещество номер m чрез точно 100 междинни реакции?

Допустимо е да използвате наготово теоретични резултати, доказани на лекции, само трябва да обясните добре за какво става дума.

Решение. Моделираме задачата с ориентиран мултиграф. Върховете са веществата, като от връх i до j има точно толкова ребра, колкото са начините за превръщане на вещество i във вещество j. Преведена на езика на графите, задачата е следната: при дадени върхове ℓ и m, колко маршрута с дължина 100 има от ℓ до m?

Нека $M[i, j]$ е матрицата на съседство на мултиграфа. Имаме $M[i, j] = T(i, j)$, за $1 \leq i, j \leq n$. Отговорът е $M^{100}[\ell, m]$, което означава клетката на ред ℓ и колона m в матрицата M, повдигната на степен 100. На лекции подробно доказахме, че за всяко $k \geq 0$, $M^k[i, j]$ е равно на броя на маршрутите с дължина k от връх i до връх j.

Задача 2. С формулата на Бине и биномната формула на Нютон преработваме лявата страна, докато получим дясната:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right] = F_{2n} \,.$$