ИКТ в НОС

Графика и геометрия

Тема №7

Графика и размерности

Основи на Компютърната графика

Основни идеи

- Визуализиране чрез компютърни средства
- Двумерният свят е частен случай на тримерния
- Практическо приложение на аналитичната геометрия

Включва

- Статични изображения
- Динамични изображения (анимация)

Етимология

- *Anima* (лат.): *живот*, *душа*, *дъх*, *порив на вятър*
- Множество производни думи: *аниматор*, *анималистичен*, *реанимация*, *аниме*, *анимизъм*, …

Разчита безпрекословно на

- Скоростта на съвременните компютри
- Несъвършенствата на човешкия мозък
  - Човек не вижда прекалено бързите движения
  - Човек не вижда прекалено бавните движения

Размерности

Три размерности

Размерност на графичните обекти

- Три различни размерности
- Обектите притежават едновременно и трите

Видове размерности

- Обектна размерност
- Пространствена размерност
- Визуална размерност

Обектна размерност

Размерност на самия обект

- Традиционна представа за размерност
- Определя разнообразието от точки на обект

Примери

- С нулева размерност са точките
- Едномерни са линиите
- Двумерни са квадратите

Пространствена размерност

Обектна размерност на пространството

- Определя разнообразието от позициите на обект
- Обектна размерност ≤ пространствена размерност
  - Можем да сложим квадрат в 3D пространство
  - Не можем да сложим квадрат в 1D пространство

Примери

- В планиметрията имаме двумерно пространство
- В стереометрията – тримерно пространство

Визуална размерност

Обектна размерност на графичните елементи

- Определя разнообразието от свойствата на обект
- Не е ограничена от другите две размерности
    - Квадрат (2D) може да се нарисува от малки сферички (3D)
    - Квадрат (2D) може да се нарисува от точки (0D)

Примери

- Рисуване с точки е визуална размерност 0D
- Рисуване с отсечки е визуална размерност 1D

Съчетание на размерностите

Коя размерност се има предвид?

- Зависи от контекста на споменаване
- Например в „тримерна точка“ се има предвид пространствената размерност

Квадрат, висящ „във въздуха“ има:

- Едномерна визуална размерност
- Двумерна обектна размерност
- Тримерна пространствена размерност

Координатни системи

Координатни системи

Роля на КС

- Определя мястото на обект
- Декартова, полярна, сферична, цилиндрична, …

КС в СУИКА

- Единствено декартова координатна система
- Ако се ползва друга, трябва да се преобразува до декартова
- Забележка: понякога е полезно да се ползва друга КС

Декартова координатна система

Елементи за 3D КС

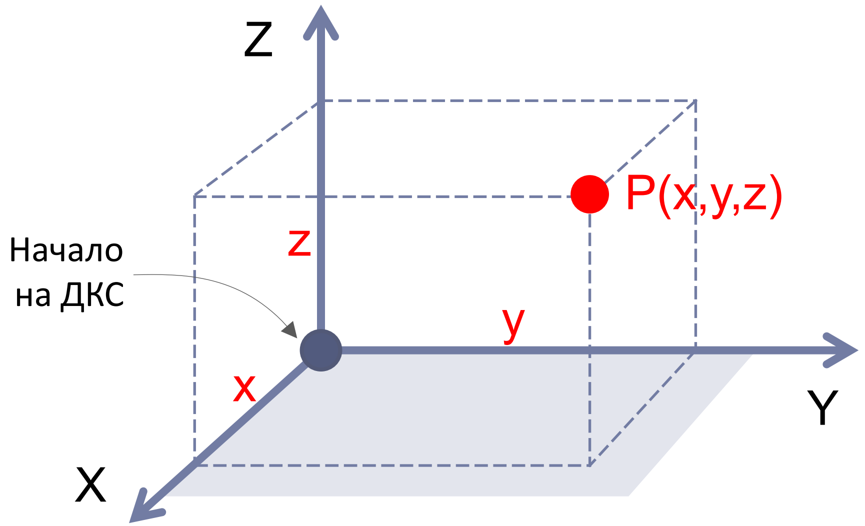
- Начало – точка
- Три перпендикулярни оси

Осите

- С условни имена X, Y, Z
- С равни единици за разстояние
- Посоките са относителни

Координати на точка

- Три разстояния x, y и z, по едно за всяка от осите
- Началото има координати (0,0,0)
- Точка по оста X има координати (x,0,0)



Двумерна ДКС

- Частен случай на тримерната ДКС
- Ако работим в равнината XY, то за всички координати z=0

Трансформиране

- ДКС е вградената КС в СУИКА
- На практика координати от други координатни системи се трансформират до ДКС, а не обратното

Полярна координатна система

Елементи за ПКС

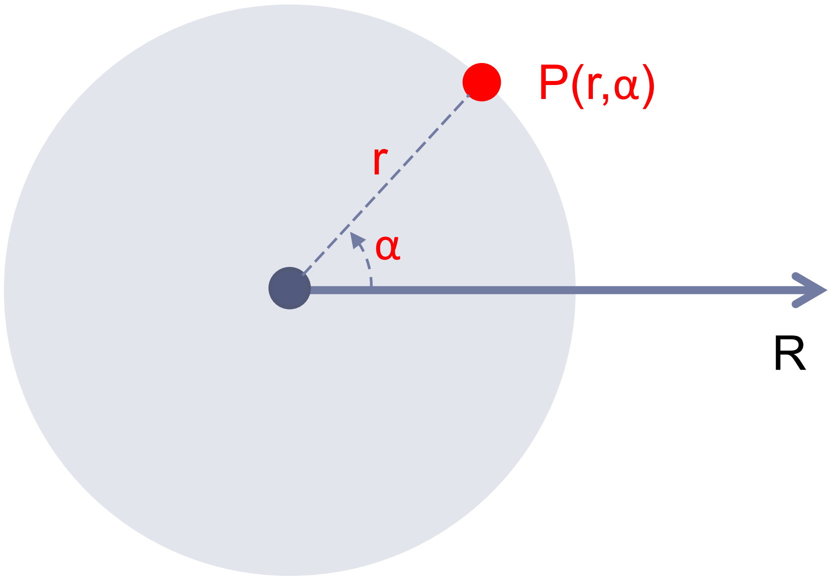
- Начало или полюс – точка
- Полярна ос

Полярна ос

- Минава през полюса
- Определя нулевата посока (ъгъл)
- Посоката на измерване е относителна

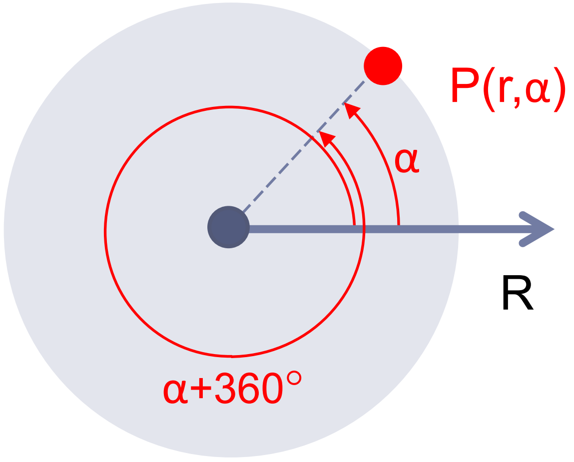
Координати на точка

- Разстояние r до полюса и ъгъл α до полярната ос
- Началото има координати (0,…)
- Точка по полярната ос има координати (… ,0)



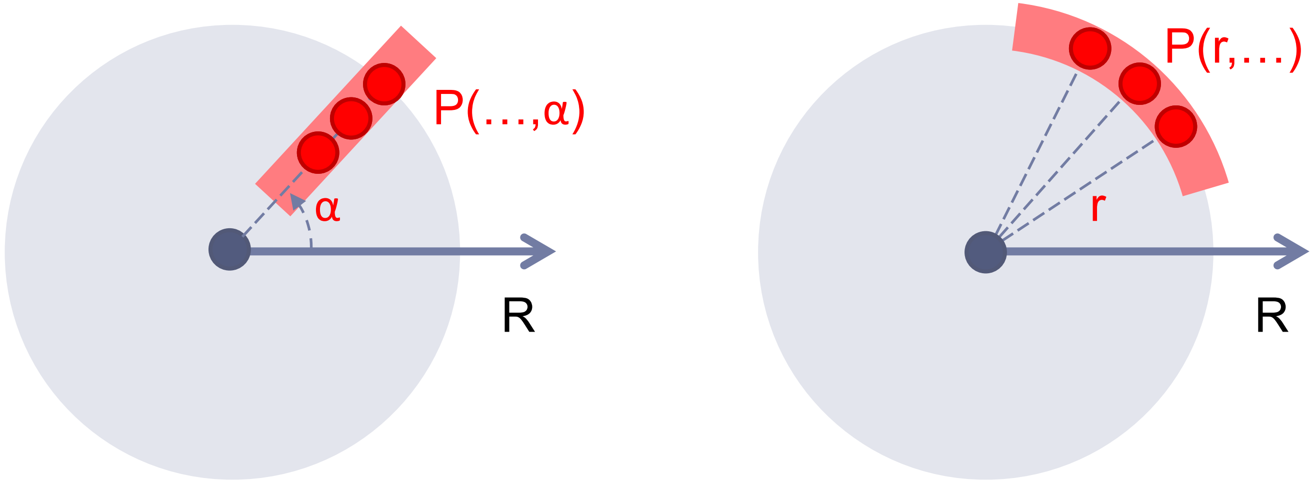
Единственост

- На всеки координати съответства единствена точка
- Обратното не е вярно, например $(r,\alpha)=(r,\alpha+360°)$
- Началото на ПКС има координати $(0,\alpha)$ за произволно α



Координатни линии

- Радиално разположени точки при променлив радиус, но фиксиран ъгъл
- Концентрично разположени точки при променлив ъгъл, но фиксиран радиус



Употреба на ПКС

- Въртеливи движения
- Кръгови траектории

Преобразуване до декартови координати

- $x = r.\cos(\alpha)$
- $y = r.\sin(\alpha)$

Сферична координатна система

Елементи за СКС

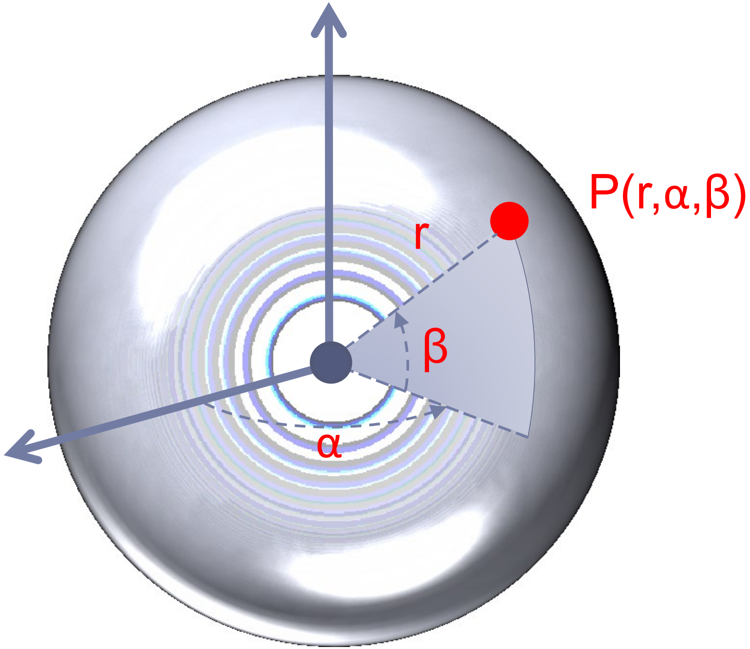
- Начало или полюс – точка
- Две перпендикулярни полярни оси

Полярни оси

- Минават през полюса
- Определят нулевите посоки (ъгли)
- Посоките на измерване са относителни

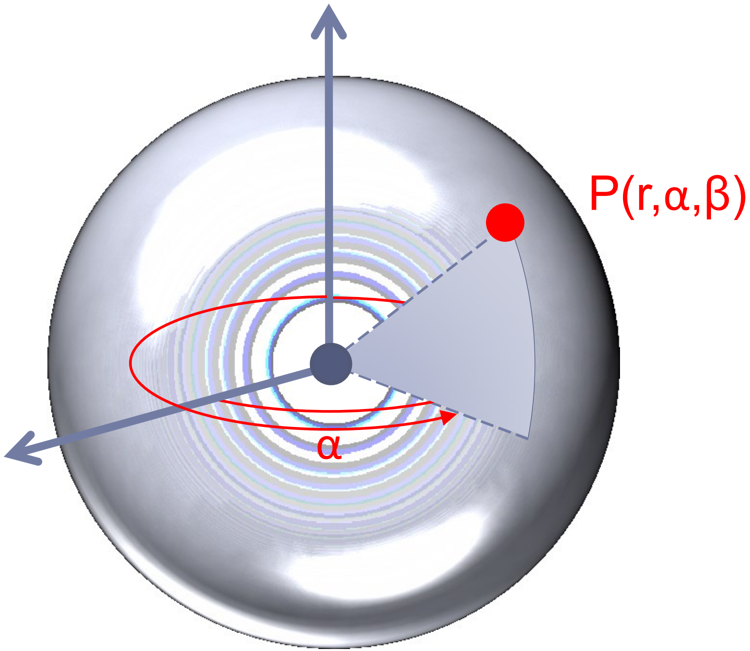
Координати на точка

- Разстояние r до полюса и ъгли α и β до полярните оси
- Често β се измерва до перпендикулярната равнина
- Началото има координати (0,… ,…)



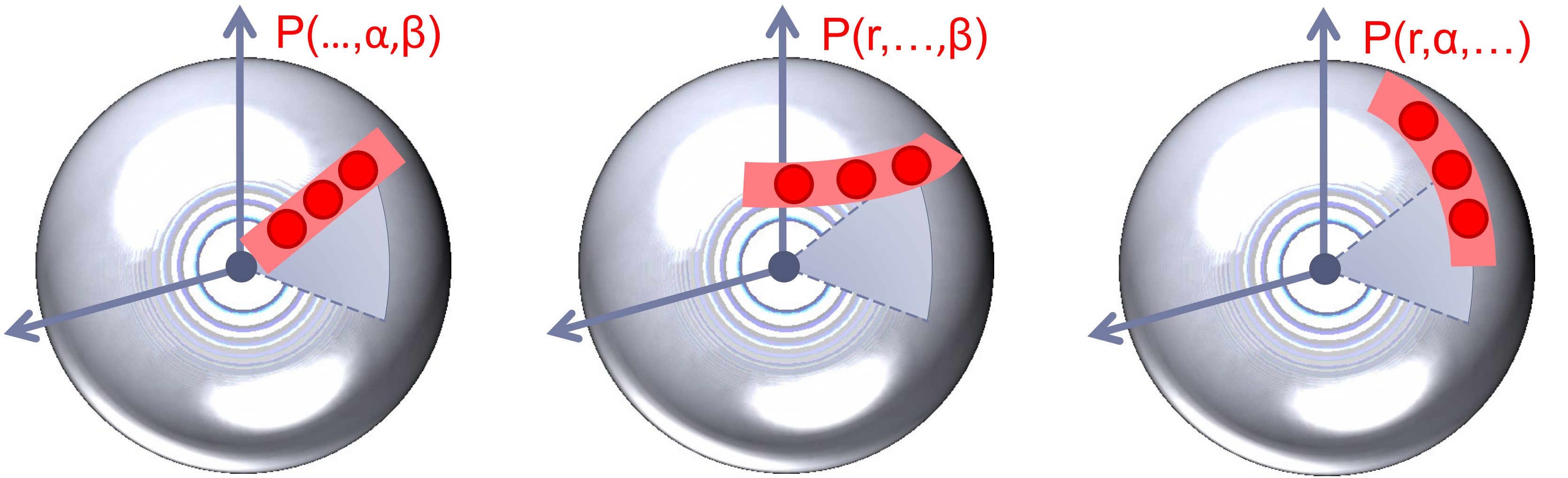
Единственост

- На всеки координати съответства единствена точка
- Обратното не е вярно, например $(r,\alpha,\beta)=(r,\alpha+360°,\beta-720°)$
- Началото има координати $(0,\alpha,\beta)$ за произволни ъгли



Координатни линии

- Радиално разположени точки при променлив радиус, но фиксирани два ъгъла
- Концентрично разположени точки при променлив ъгъл, но фиксиран радиус и фиксиран друг ъгъл



Употреба на ПКС

- Въртеливи движения в 3D
- Кръгови траектории в 3D

Преобразуване до декартови координати

- $x = r.\cos(\alpha).\cos(\beta)$
- $y = r.\sin(\alpha).\cos(\beta)$
- $z = r.\sin(\beta)$
- Полярната координатна система е частен случай при $\beta=0$

Често срещани задачи

Ръчни пресмятания

Предоставени средства

- В СУИКА има само основни пресмятания
- Всичко останало се програмира ръчно

Често срещани задачи

- Транслация от едно място на друго
- Разстояние между две 3D точки
- Намиране на междинни точки
- Обхождане на числов интервал

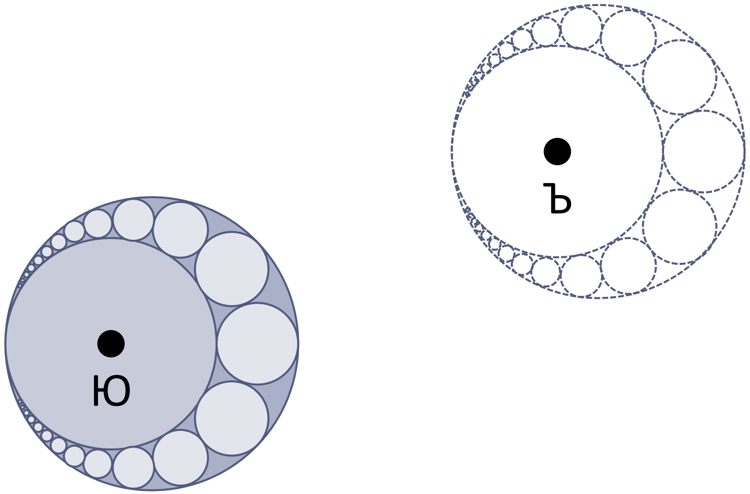
На практика

- Съществена част от задачите се свеждат до някоя често срещана задача

Задача за транслацията

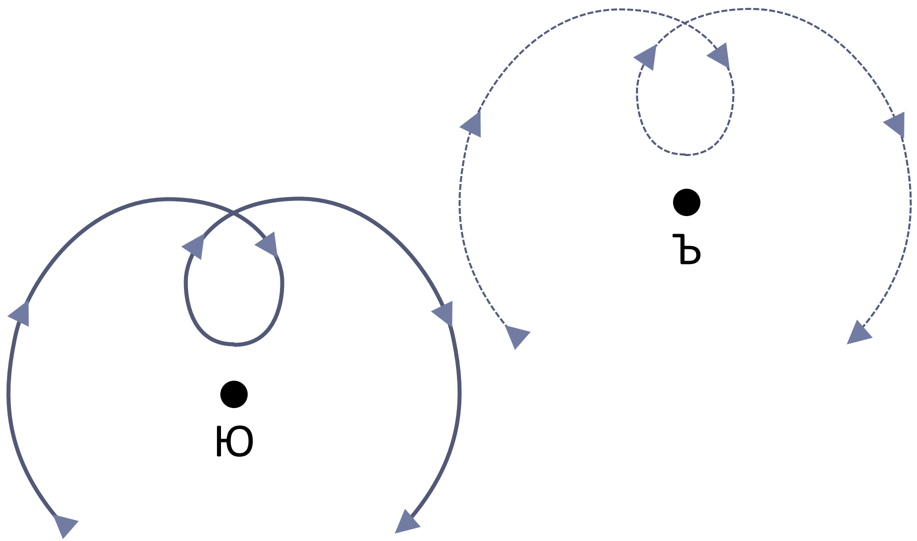
Вариант №1

- Съществува обект около точка Ю
- Искаме да го пренесем около точка Ъ



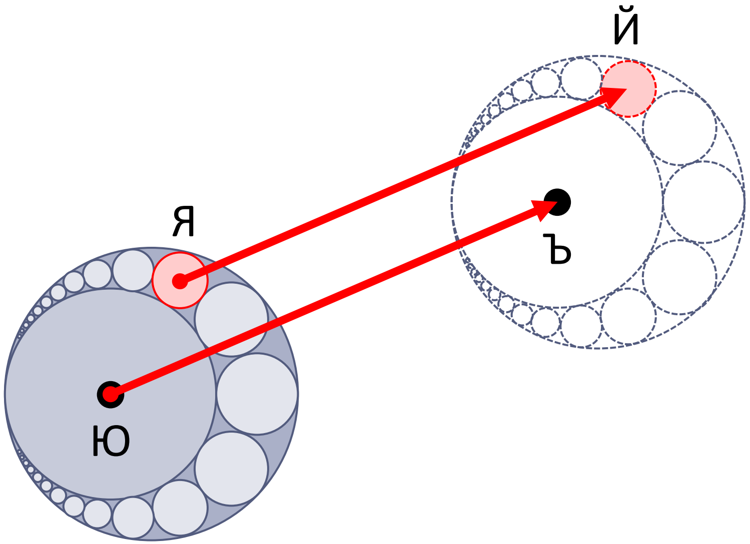
Вариант №2

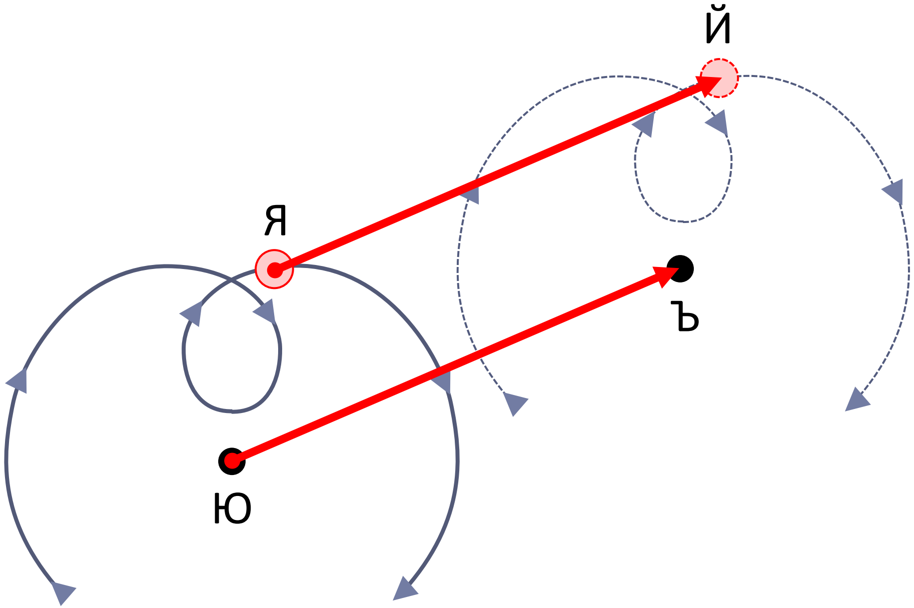
- Съществува движение около точка Ю
- Искаме да го пренесем около точка Ъ
- Няма значение дали траекторията минава през точките



Решение

- Нека двете точки са с координати Ю $(x_{ю},y_{ю},z_{ю})$ и Ъ $(x_{ъ},y_{ъ},z_{ъ})$
- Знаем точка Я, търсим точка Й
- Векторно получаваме Й = Я + $\overrightarrow{ЮЪ}$





Пример

Дадено

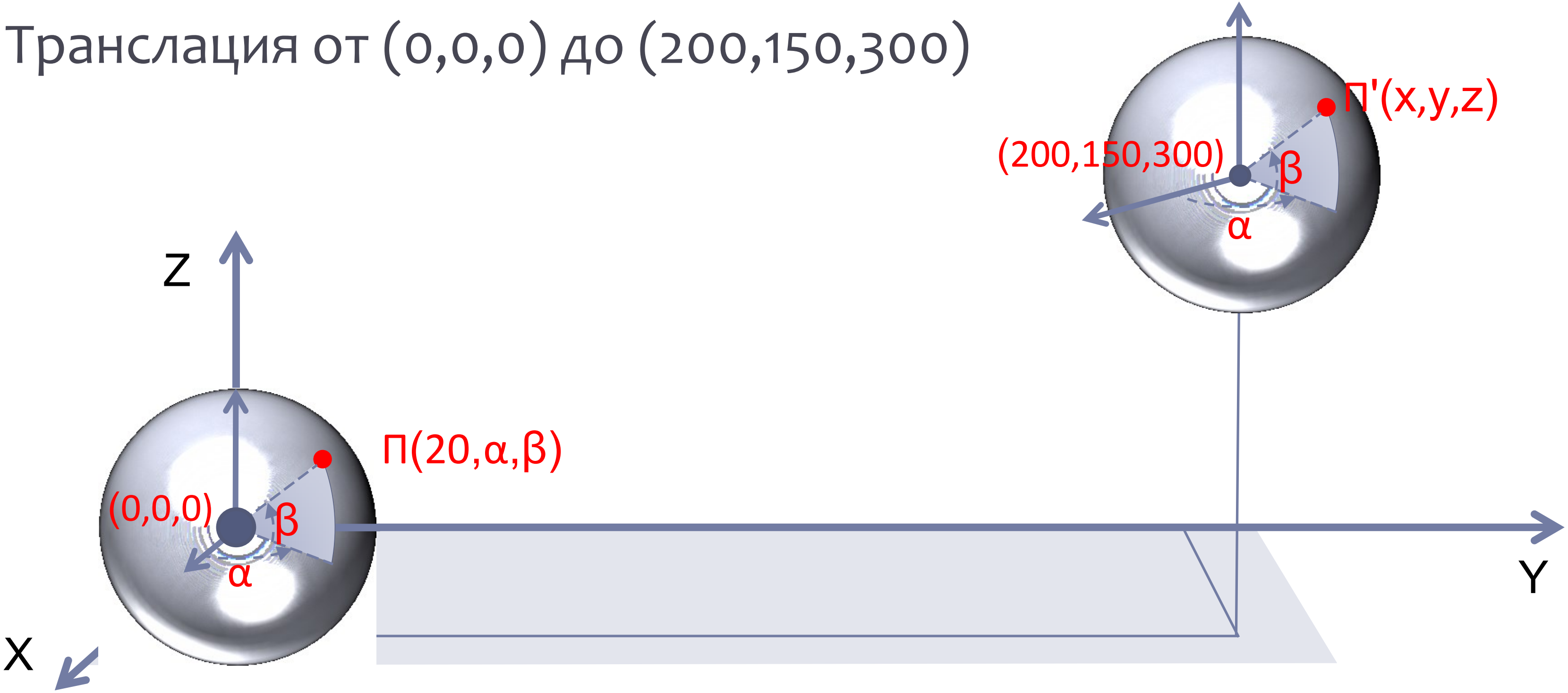
- Точка П се движи по сфера с радиус 20 и център (0,0,0)
- Координатите на П(20,α,β) са сферични, α и β се менят
- Имаме точка (200,150,300) в декартови координати

Търси се

- Същото движение, но около точка Ф

Идея за решение

- П в декартови координати
- Транслация от (0,0,0) до (200,150,300)



Решение

- П в декартови координати:

$$\Pi_x = 20.\cos(\alpha).\cos(\beta)$$

$$\Pi_y = 20.\sin(\alpha).\cos(\beta)$$

$$\Pi_z = 20.\sin(\beta)$$

- Транслация от (0,0,0) до (200,150,300)

$$\Pi'_x = 200 + 20.\cos(\alpha).\cos(\beta)$$

$$\Pi'_y = 150 + 20.\sin(\alpha).\cos(\beta)$$

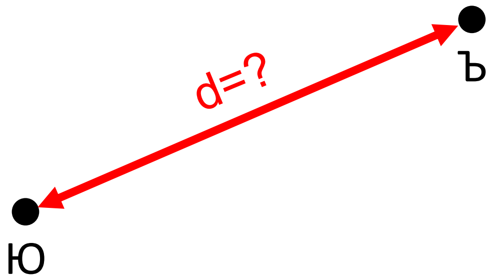
$$\Pi'_z = 300 + 20.\sin(\beta)$$

(200-0, 150-0, 300-0)

Задача за разстояние

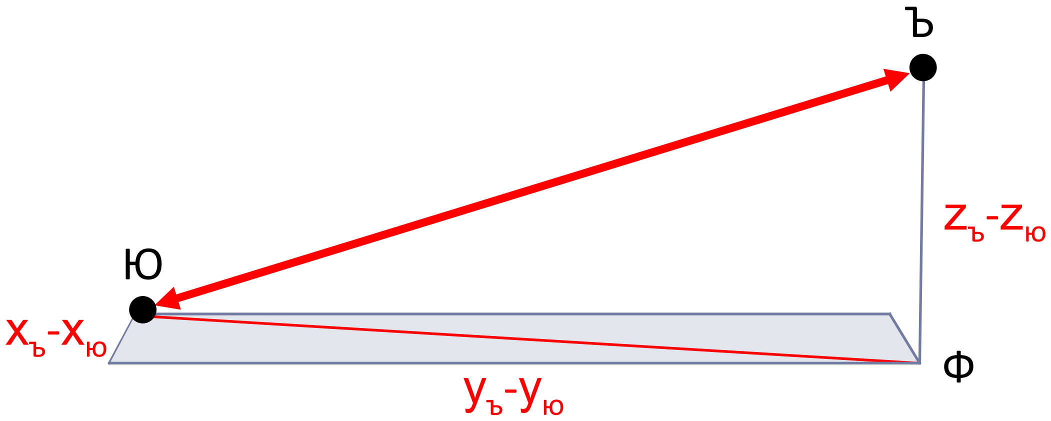
Разстояние в 3D

- Две тримерни точки Ю и Ъ
- Искаме да намерим разстоянието между тях



Идея за решение

- Питагорова теорема $|ЮФ| = \sqrt{(x_ъ - x_ю)^2 + (y_ъ - y_ю)^2}$
- Приложена двукратно $|ЮЪ| = \sqrt{|ЮФ|^2 + (z_ъ - z_ю)^2}$
- Краен резултат $|ЮЪ| = \sqrt{(x_ъ - x_ю)^2 + (y_ъ - y_ю)^2 + (z_ъ - z_ю)^2}$



Пример

- Рисувате права тръба от (20,2,0) до (10,10,5)
- Колко трябва да е дълга?

Решение

- Пресмятаме директно:

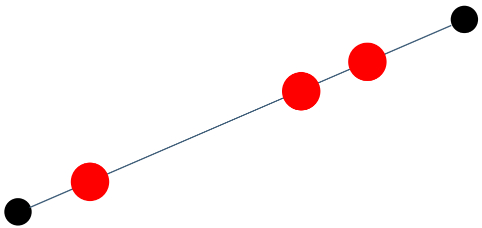
$$\sqrt{(20-10)^2 + (2-10)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{100 + 64 + 25} \approx 13.7$$

- Около 13.7, но какво? Метри? Милиметри?

Задача за междинно положение

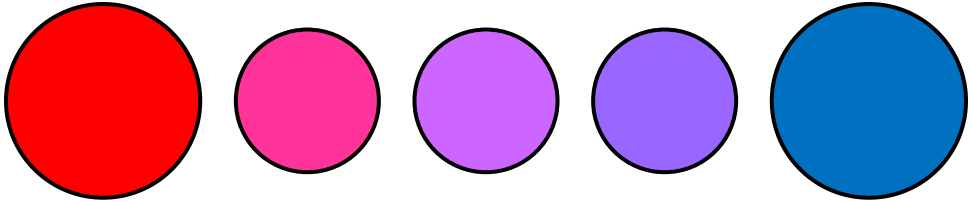
Вариант №1

- Съществуват две 3D точки
- Искаме да намерим точки по правата линия между тях



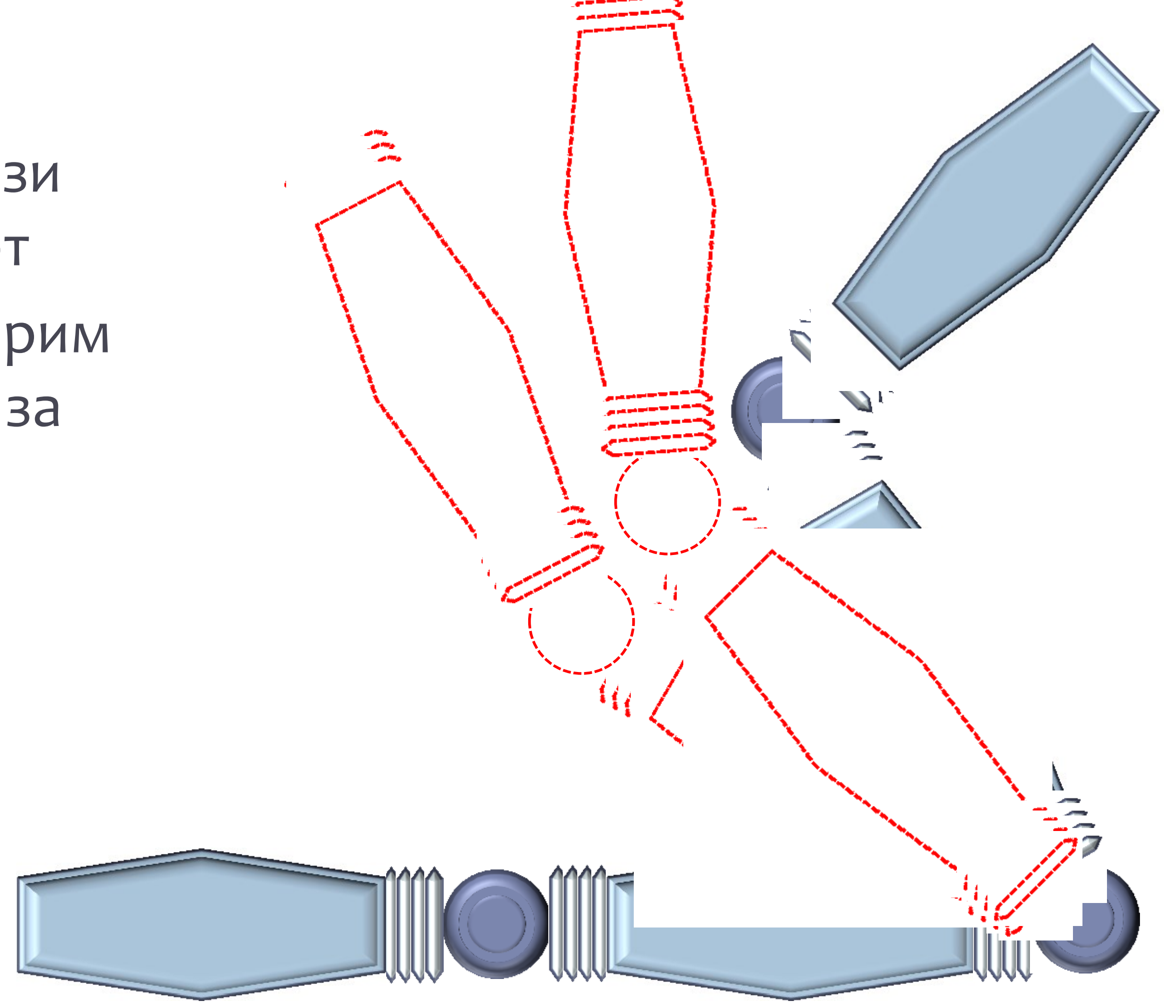
Вариант №2

- Съществуват два цвята
- Искаме да намерим междинни цветове



Вариант №3

- Съществуват пози на ръка на робот
- Искаме да намерим междинни пози за плавен преход



Идея

- Двете състояния се описват числово
- Правим линейна комбинация
- Комбинацията означава, че с коефициент ще определяме каква част от всяко състояние ще комбинираме
- Линейността означава, че средно състояние получаваме при средна стойност на коефициента

Стъпка №1: представяме състоянията числово

- Допустимите стойности да са достатъчно на брой
  - При [0,1] няма как да намерим междинни стойности
  - При [0.0, 0.1, 0.2, … 0.9, 1.0] можем
- Примери
  - Координати чрез тройка числа (x,y,z)
  - Цвят чрез тройка числа (r,g,b)
  - Поза чрез двойка ъгли (α,β)

Стъпка №2: избираме k

- Допустими стойности $k \in [0,1]$
- Стойността на k определя междинното състояние
  - При $k=0$ получаваме единия край
  - При $k=1$ получаваме другия край
  - При $0<k<1$ получаваме междинни състояния
- При избор на $k<0$ или $k>1$ получаваме външни състояния

Стъпка №3: изчисляваме

- Формула за линейна комбинация П=(1-k).Ю+k.Ъ
- Покомпонентно изчисление

$П_x = (1\text{-}k).Ю_x+k.Ъ_x$

$П_y = (1\text{-}k).Ю_y+k.Ъ_y$

$П_z = (1\text{-}k).Ю_z+k.Ъ_z$

- В случая с позата и ъглите

$\alpha_k = (1\text{-}k).\alpha_1+k.\alpha_2$

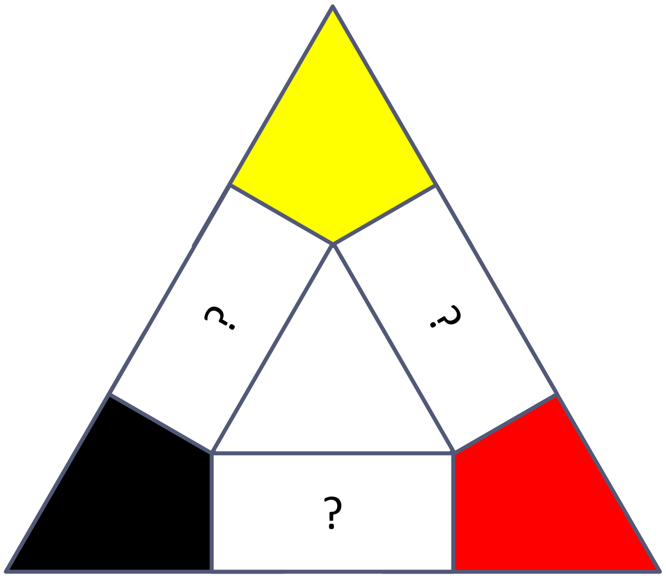
$\beta_k = (1\text{-}k).\beta_1+k.\beta_2$

Пример

- Върхове на триъгълник са в жълто, червено и черно
- Да се направят страните с междинни цветове

Решение

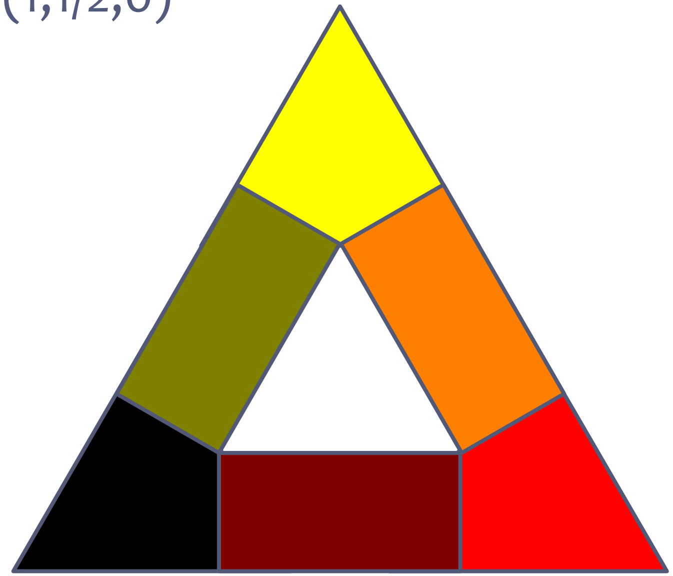
- Представяме цветовете като тройки от интензитетите на червена, зелена и синя светлина (RGB модел)
- Цветовете във върховете са
  - Жълто (1,1,0)
  - Червено (1,0,0)
  - Черно (0,0,0)



Цветове на страните

- Линейна комбинация с k=1/2
- Между жълто и червено (1,1/2,0)

  Получено е така (1-1/2)(1,1,0) + 1/2(1,0,0) = (1,1/2,0)
- Между червено и черно (1/2,0,0)
- Между черно и жълто (1/2,1/2,0)



Задача за обхождане на интервал

Условие

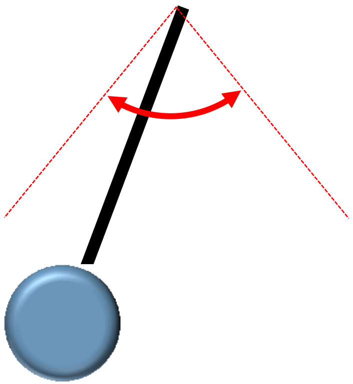
- Числов параметър се променя в даден интервал
- Ние избираме как се променя параметъра

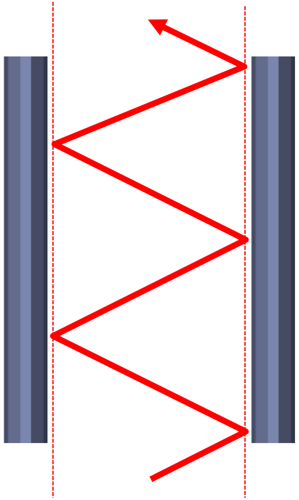
Приложение

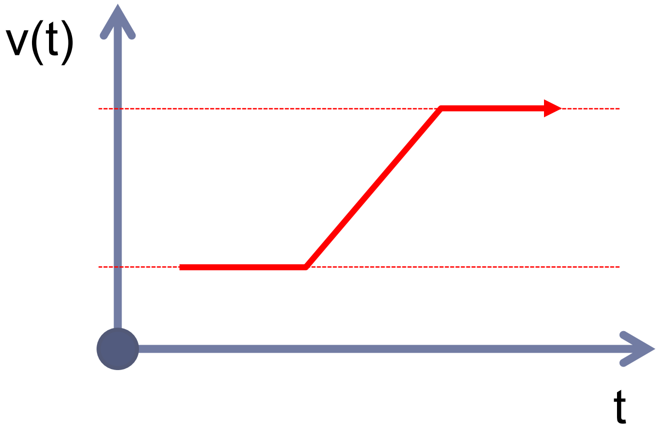
- Най-често при анимация

Примери

- Махало се люлее от един наклон до друг наклон
- Топче се движи на зиг-заг между две релси
- Скорост на движение се променя от една до друга







Решение

- Според функцията, с която ще обхождаме
- Нека сме избрали sin(x)
- Търсим f(x), в която се използва sin(x) и $f(x) \in [A,B]$

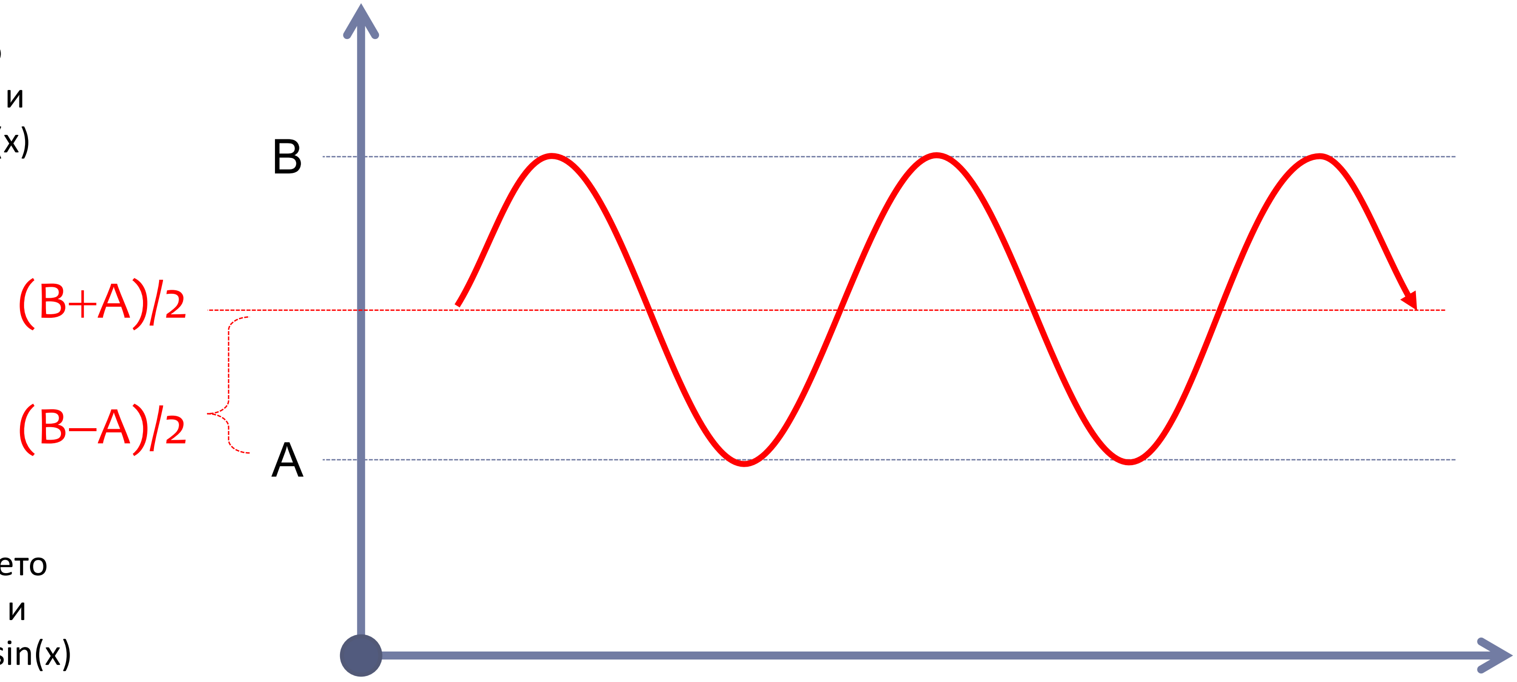
Стъпки

- В началото . . . . $\sin(x) \in [-1,1]$
- Долна граница 0 . . . . $\sin(x)+1 \in [0,2]$
- Горна граница 1 . . . . $(\sin(x)+1)/2 \in [0,1]$
- Диапазон B-A . . . . $(B-A).(\sin(x)+1)/2 \in [0,B-A]$
- От A до B . . . . $A+(B-A).(\sin(x)+1)/2 \in [A,B]$
- Преобразуваме . . . . $f(x) = (B+A)/2+(B-A)/2.\sin(x)$

Как да запомним?

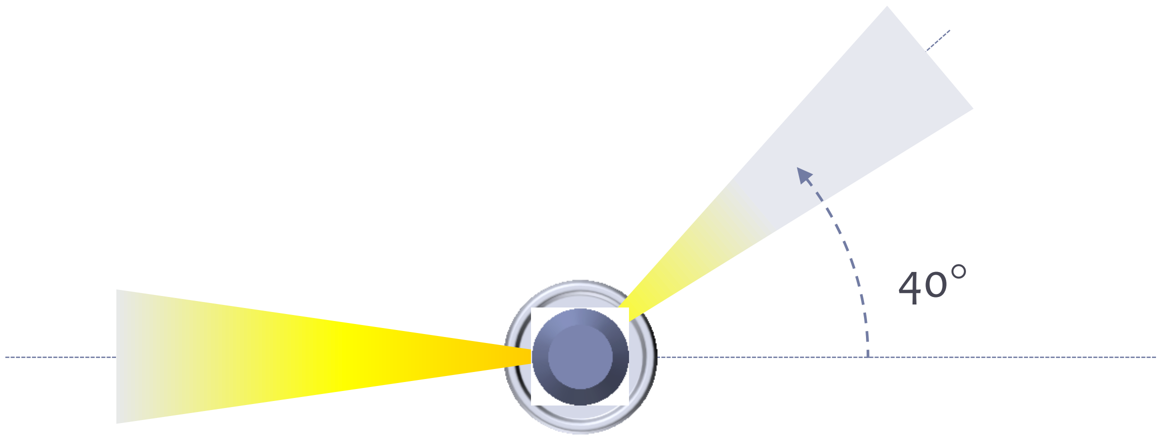
Полумястото между А и Б е и средата на sin(x)

Полуразстоянието между А и Б е и амплитудата на sin(x)



Пример

- Лъч на фар се върти наляво-надясно
- В единия край стига до 40°
- В другия край стига до 180°
- Да се намери уравнение на движението

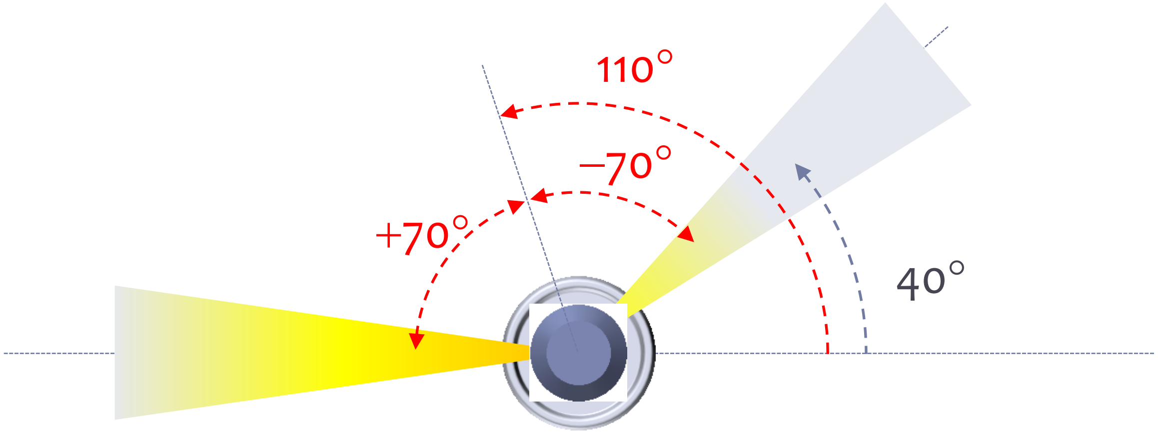


Директно решение

- $\alpha_{фар}(t) = (180°+40°)/2+(180°-40°)/2.\sin(t) = 110°+70°\sin(t)$

Алтернативно обяснение

- Става за директно получаване
- Средата е 110°, завърта се на ±70° наляво-надясно



Обобщение

Размерности

Размерности на обект

- Обектна (геометрична) – на самия обект
- Пространствена – на пространството, където е обекта
- Визуална – на графичните примитиви, с които е нарисуван

Координатни системи

- Декартова с координати (x,y,z)
- Полярна с координати (r,α)
- Сферична с координати (r,α,β)

Преобразуване от сферична до декартова

- $x = r.\cos(\alpha).\cos(\beta)$
- $y = r.\sin(\alpha).\cos(\beta)$
- $z = r.\sin(\beta)$

Само от полярна

Често срещани задачи

- Транслация на обект/движение чрез прибавяне на вектор
- Разстояние между две 3D точки чрез Питагорова теорема
- Междинно състояние чрез линейна комбинация
- Обхождане на интервал чрез sin(x)

ИКТ в НОС

Край

Коментари, въпроси