Въведение в съждителната и предикатната логика

Минко Марков

03.10.2011 г.

1 Същност на логиката.

Логиката е науката за правенето на валидни изводи и правилни разсъждения. Дали даден извод е валиден или не, зависи от *фòрмата* му. Да разгледаме следния пример, често срещан в учебниците по логика:

> Всеки човек е смъртен.
> Сократ е човек.
> Следователно, Сократ е смъртен.

Всеки разумен човек ще се съгласи, че изводът е валиден. Причината изводът да е валиден обаче не е тази, че трите изречения са верни. Причината е, че фòрмата на този извод е такава, че той е верен. Ще демонстрираме това с друг извод, чиято форма е същата:

> Всяка риба е безсмъртна.
> Заекът е риба.
> Следователно, заекът е безсмъртен.

И трите изречения са неверни, но въпреки това изводът е валиден, защото при **тези** предпоставки (а именно, първите две изречения), третото изречение следва. Забележете, че и двата извода имат една и съща форма[†]:

> Всяка ______ е ______.
> ______ е ______.
> Следователно, ______ е ______.

Цветовете указват кои думи са едни и същи – примерно, първата дума в първото изречение е същата като втората дума във второто изречение, и т. н.

Да повторим: изводът е валиден заради фòрмата си, а не заради съдържанието на съставляващите го думи. Изводът остава верен каквито и думи да се слагат на празните места, стига на еднаквооцветени места да се слагат едни и същи думи.

Това, че валидността на аргумента зависи от фòрмата му, е достижение на древногръцката философска мисъл и по-точно на гениалния философ Аристотел, чиито трудове съдържат най-старото (известно днес) систематично изучаване на правилата за извод.

[†] Това, че “всеки” е от мъжки род, а “всяка”, от женски, няма значение; също така няма значение дали думите в празните позиции са членувани или не

2 Съждителна логика

Примерът с извода от предишната секция е такъв, че за да го осмислим, трябва да разгледаме структурата на изречения, които го съставят. Сега ще разгледаме по-прост пример за извод, в който съставляващи прости изречения можем да считаме за елементи без структура.

> **Извод 1**
> Ако вали дъжд, Иван носи чадър.
> Вали дъжд.
> Следователно, Иван носи чадър.

Простите изречения са *Вали дъжд* и *Иван носи чадър*. Всяко от тях е или истина, или лъжа. В съждителната логика не се допускат "междинни възможности" на частична истинност; светът на съждителната логика в този смисъл е черно-бял, или истина, или лъжа, друга възможност няма.

Извод 1 е валиден. Това е ясно от общи съображения, но нататък ще видим, че апаратът на съждителната логика позволява да докажем формално валидността му. Сега да разгледаме друг пример.

> **Извод 2**
> Ако вали дъжд, Иван носи чадър.
> Иван носи чадър.
> Следователно, вали дъжд.

Интуитивно е ясно, че **Извод 2** е невалиден, тъй при изказаните предположения нищо не пречи на Иван да носи чадър дори когато не вали дъжд. Сега да разгледаме два други извода.

> **Извод 3**
> Ако денят е понеделник, Мария отива във ФМИ.
> Денят е понеделник.
> Следователно, Мария отива във ФМИ.

> **Извод 4**
> Ако денят е понеделник, Мария отива във ФМИ.
> Мария отива във ФМИ.
> Следователно, денят е понеделник.

Ясно е, че **Извод 3** е валиден, а **Извод 4**, невалиден. Освен това,

- причината, поради която **Извод 3** е валиден е същата, поради която **Извод 1** е валиден,
- причината, поради която **Извод 4** е невалиден е същата, поради която **Извод 2** е невалиден.

Валидността или невалидността на четирите извода е следствие на тяхната форма, а не на това, какви прости изречения са използвани. **Извод 3** се получава от **Извод 1** чрез заместване на "Вали дъжд" с "Денят е понеделник" и на "Иван носи чадър" с "Мария отива във ФМИ". Аналогично, **Извод 4** се получава от **Извод 2**.

Да повторим – няма нищо особено в простите изречения "Вали дъжд" и "Иван носи чадър", което да прави **Извод 1** валиден. Можем да ги заменим с кои да е прости изречения и изводът ще остане валиден. Аналогично, **Извод 2** е невалиден не защото има нещо особено в простите му изречения.

Фòрмата на **Извод 1** е:

Ако p, то q
p
Следователно, q

Извод 3 има същата форма. p и q са променливи, всяка от които е или истина, или лъжа; такива променливи се наричат *логически променливи*. Още казваме, че те са *прости съждения*. Формалната дефиниция на "просто съждение" е, просто разказвателно изречение, което е или истина, или лъжа. Въпросителните изречения и възклицанията не са съждения. Не са съждения и разказвателни изречения, за които не можем да твърдим, че са или истина, или лъжа. За краткост, ще бележим истината с T, а лъжата с F. Освен прости съждения въвеждаме и *логически константи*, които са T и F.

Фòрмата на невалидните **Извод 2** и **Извод 4** е:

Ако p, то q
q
Следователно, q

Защо извод с такава форма е невалиден ще стане ясно нататък.

Съставни съждения се образуват от прости съждения, други съставни съждения и логически константи чрез *логически съюзи*. Сега ще изброим логическите съюзи, които ще използваме в тази лекция.

2.1 Видове логически съюзи

Дизюнкция Бележи се с "$\vee$". Ако p и q са съждения (прости или съставни, няма значение), то $\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$ е *дизюнкцията на* p *и* q. Тя е съставно съждение, което е

- лъжа, ако и p, и q са лъжа,
- истина във всеки останал случай. А тези останали случаи са три:
  - p е лъжа, q е истина
  - p е истина, q е лъжа
  - p е истина и q е истина

Иначе казано, дизюнкцията е истина тогава и само тогава, когато поне едно от участващите съждения е истина. Друг начин да определим дизюнкцията е чрез таблица:

p	q	$\mathsf{p} \vee \mathsf{q}$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Такава таблица се нарича *таблица на истинност*. Всеки ред на таблицата отговаря на точно една възможна комбинация от F и T за p и q. Всяко такова "раздаване" на конкретни стойности (F или T) на променливите се нарича *валюация*. От комбинаториката е известно, че броят на валюациите е 2^n, където n е броят на участващите променливи[†].

[†]За логическите константи може да мислим, че също имат таблица на истинност, но тя се състои само от един ред. Тъй като $2^0 = 1$, правилото за броя на редовете остава в сила. Този единствен ред за константата T е T и за константата F е F.

Дизюнкцията горе-долу съответства на съюза “или” от естествения език. Съответствието обаче не е точно, понеже естественото “или” на български се употребява с два различни смисъла. “Или” в естествения език може да бъде изключващо, което значи, че изразът е истина когато точно едно от участващите съждения е истина, и лъжа в противен случай. Примерно, ако човек не може да си спомни каква е първата лекция за деня, може да каже

Първата лекция е по анализ или по алгебра.

Тук “или” се употребява в смисъл на изключващо “или” – ясно е, че лекцията няма да е едновременно по анализ и по алгебра.

Дизюнкцията съответства точно на другото, включващото “или”, при което, ако двете участващи съждения са истина, цялото съждение е истина. Примерно

Времето на морето е слънчево или времето по планината е ветровито.

Примерът може да не звучи съвсем естествено, но смисълът е, че поне едно от двете, а може и двете едновременно са изпълнени: слънце на морето и вятър по планините.

Ние ще възприемем конвенцията, че само едно употребено “или” означава винаги включващо “или”, докато за изключващото “или” конструкцията е “или ..., или ...”. Съгласно тази конвенция, за да кажем, че първата лекция е по точно една от дисциплините анализ и алгебра, трябва да кажем

Първата лекция е или по анализ, или по алгебра.

Изключващо или Бележи се с “$\oplus$”. Вече обяснихме смисъла на този логически съюз. Тук сама ще дадем таблицата му на истинност, която е

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Конюнкция Бележи се с “$\wedge$”. Ако p и q са съждения, то $p \wedge q$ е *конюнкцията на* p *и* q. Тя е съставно съждение, което е

- лъжа в трите случая:
  - p е лъжа и q е лъжа
  - p е лъжа, q е истина
  - p е истина, q е лъжа
- истина, ако и p, и q са истина,

Иначе казано, конюнкцията е истина тогава и само тогава, когато и двете участващи съждения са истина. Друг начин да определим конюнкцията е чрез таблица:

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Конюнкцията съответства точно на съюза “и” от естествения език. Примерно, *Днес времето е слънчево и утре времето ще е слънчево.*

Забележете, че съюзите “а” и “но” на български също изразяват конюнкция, примерно

Днес времето е слънчево, а утре времето ще е облачно.
Вчера отидох в университета, но не видях Петър.

Импликация Бележи се с “$\to$”. Нека p и q са съждения. Тогава $p \to q$ се чете “p *импликация* q”. Съждението p се нарича *антецедент*, а q се нарича *консеквент*.

Импликацията донякъде съответства на съюза “ако ..., то ...” от естествения език, но съответствието съвсем не е пълно. Забележете, че в естествения език конструкцията “ако ..., то ...”, или дори само “ако ..., ...” често изразява причинно-следствена връзка, примерно

Ако изпусна чашата, тя ще се счупи.

Чупенето на чашата е следствие от изпускането ѝ.

От друга страна, при липса на очевидна причинно-следствена връзка между антецедента, импликацията може да звучи безсмислено от гледна точка на разговорния език, примерно

Ако $2 + 2 = 4$*, то Рим е столицата на Италия.*

В логиката, която дискутираме, за причинно-следствени връзки не става дума. В съждителната логика единствено ни интересува истинността на някакви съждения. Импликацията “пренася истинност в посоката на стрелката”, тоест

- ако антецедентът е истина
  - ако консеквентът е истина (като в последния пример), цялата импликация е истина,
  - ако консеквентът е лъжа (примерно, *Ако* $2 + 2 = 4$*, то Милано е столицата на Италия*), цялата импликация е лъжа, понеже нямаме пренасяне на истината
- ако антецедентът е лъжа, то цялата импликация е истина независимо от това дали консеквентът е лъжа или не, тъй като няма истина за пренасяне в посока на стрелката.

Последното правило е най-контраинтуитивно, защото според него съждения като

Ако $2 + 2 = 400$*, то понеделник е в петък.*

са истина. Ключът към разбирането на импликацията е, човек да не мисли в причинно-следствени категории, а просто за пренасяне на истинност. И така, таблицата на истинност за импликацията е следната

p	q	$p \to q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Има много езикови конструкции, които съответстват на импликацията. $p \to q$ може да е формалният запис на всяко от следните твърдения на естествен български език:

- Ако p, то q.

- Ако p, q.
- Достатъчно условие за q е p.
- p е достатъчно условие за q.
- q когато p.
- q тогава, когато p.
- Необходимо условие за p е q.
- q е необходимо условие за p.
- p влече q.
- p само ако q.
- p само тогава, когато q.
- q следва от p.

Да повторим. Ако разсъждаваме в термините на необходимост и достатъчност (в математиката често се изразяваме така), антецедентът е свързан с достатъчността, а консеквентът, с необходимостта:

$$\underbrace{p}_{\text{достатъчност}} \rightarrow \underbrace{q}_{\text{необходимост}}$$

За да се убедим, че е така, да разгледаме импликацията

Ако вали дъжд, Иван носи чадър.

Да вали дъжд е **достатъчно**, за да твърдим, че Иван носи чадър. Иван да носи чадър е **необходимо**, за да твърдим, че вали дъжд[†]. Обратното обаче не е вярно! Не е вярно, че Иван да носи чадър е достатъчно, за да твърдим, че вали дъжд – Иван може да си носи чадъра през цялото време, импликацията не отхвърля тази възможност. Не е вярно също, че да вали дъжд е необходимо, за да твърдим, че Иван носи чадър – по същите съображения.

Би-импликация Бележи се с “$\leftrightarrow$”. Нека p и q са съждения. $p \leftrightarrow q$ се чете “p *тогава и само тогава, когато* q”. Би-импликацията е истина, когато p и q имат една и съща логическа стойност, и лъжа в противен случай. Таблицата на този съюз е следната.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

[†]Забележете, че не казваме “Иван да носи чадър е необходимо, за да вали дъжд”. Това би било объркващо, понеже би звучало като причинно-следствена връзка, каквато в реалния свят няма: това, че някой носи чадър, не причинява дъжд. В реалността, причинно-следствена връзка между дъжда и чадъра има, но тя е в обратната посока. И, както казахме, за импликацията от съждителната логика, реалните причинно-следствени връзки нямат никакво значение. Нашата формулировка “Иван да носи чадър е необходимо, за да твърдим, че . . .” не предполага никаква причинно-следствена връзка между дъжда и чадъра на Иван. С нея ние казваме, че не е възможно да вали дъжд и Иван да е без чадър.

Отрицание Нарича се още *негация*. Отрицанието не е съюз в същия смисъл, в който са съюзи конюнкцията, дизюнкцията и т. н. Те се прилагат към две съждения, докато отрицанието се прилага към едно съждение. Ако p е съждение, неговото отрицание се бележи с "$\neg \mathrm{p}$". Отрицанието на p е лъжа, когато p е истина, и е истина, когато p е лъжа.

p	$\neg \mathrm{p}$
F	T
T	F

2.2 Таблици на истинност на съставните съждения

Нека p, q и r са прости съждения, всяко от които може да е или T, или F. Видяхме как от тях можем да образуваме съставни съждения чрез логически съюзи. На свой ред, получените съставни съждения може да се ползват за съставяне на още по-големи съставни съждения, и т. н. Съставните съждения също са или T, или F, други възможности в класическата логика няма. Това ясно се вижда в таблиците на истинност на конюнкцията, дизюнкцията и другите съюзи – в най-десните колони възможните стойности са T и F. Важното при всяко съставно съждение е, как зависи неговата стойност от стойностите на участващите прости съждения. За всяка възможна валюация на простите съждения, стойността на съставното съждение е строго определена.

Да разгледаме съставното съждение $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$. Скобите указват *приоритета:* на най-високо ниво това съждение е конюнкция, като двете съставляващи съждения не са прости, а всяко от тях е дизюнкция на прости съждения. Очевидно участващите прости съждения са 3, а не 4[†]. За да видим как зависи стойността на $(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$ от стойностите на p, q и r, правим таблица на истинност с $2^3 = 8$ реда, отговарящи на осемте възможни валюации.

p	q	r	$\mathrm{p} \vee \mathrm{q}$	$\mathrm{p} \vee \mathrm{r}$	$(\mathrm{p} \vee \mathrm{q}) \wedge (\mathrm{p} \vee \mathrm{r})$
F	F	F	F	F	F
F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T
T	T	T	T	T	T

Таблица 1

Ще покажем подробно как се попълва тази таблица. Да речем, че сме в самото начало и сме попълнили само стойностите на валюациите:

[†]Ако използваме терминологията на теорията на множествата, ще кажем, че множеството от простите съждения-участници в конюнкцията е *обединението* от множествата на простите съждения на двете дизюнкции.

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F			
F	F	T			
F	T	F			
F	T	T			
T	F	F			
T	F	T			
T	T	F			
T	T	T			

Ще попълним колоната, маркирана с $p \vee q$. Съобразяваме, че тъй като $p \vee q$ не съдържа r, можем да игнорираме (временно) колоната, маркирана с r. Тогава гледаме вляво само колоните, маркирани с p и q и все едно попълваме тази таблица:

p	q	$p \vee q$
F	F	
F	F	
F	T	
F	T	
T	F	
T	F	
T	T	
T	T	

Съгласно това, което знаем за дизюнкцията, колоната на $p \vee q$ се попълва така:

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	F	F
F	T	T
F	T	T
T	F	T
T	F	T
T	T	T
T	T	T

Връщаме се към оригиналната таблица – вече сме попълнили колоната на $p \vee q$:

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F	F		
F	F	T	F		
F	T	F	T		
F	T	T	T		
T	F	F	T		
T	F	T	T		
T	T	F	T		
T	T	T	T		

Аналогично попълваме и колоната на $p \vee r$:

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F	F	F	
F	F	T	F	T	
F	T	F	T	F	
F	T	T	T	T	
T	F	F	T	T	
T	F	T	T	T	
T	T	F	T	T	
T	T	T	T	T	

Остава да попълним колоната, маркирана с $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Тъй като това съждение зависи пряко само от колоните, маркирани с $p \vee q$ и $p \vee r$, игнорираме временно трите колони вляво и все едно попълваме:

$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	
F	T	
T	F	
T	T	
T	T	
T	T	
T	T	
T	T	

Попълването става съгласно правилата за конюнкцията:

$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T
T	T	T
T	T	T
T	T	T
T	T	T

Очевидно, това е резултатът, показан в Таблица 1 на стр. 7.

2.3 Предшествие на логическите съюзи

Ако трябва да запишем подробно сложен израз от съждителната логика, трябва да използваме много скоби. Записът става значително по-прост и лесен за четене, ако се уговорим, че следното предшествие на логическите съюзи е в сила (в намаляващ порядък):

1. отрицание,

2. конюнкция,

3. дизюнкция,

4. импликация,

5. би-импликация.

Имайки предвид това предшествие, изразът $\neg p \wedge q$ има смисъл на $(\neg p) \wedge q$, а не на $\neg(p \wedge q)$. Също така,

$$\neg p \wedge \neg q \vee r \to p \vee r \leftrightarrow \neg r \to p$$

се чете

$$\Big(\big(\big((\neg p) \wedge (\neg q) \big) \vee r \big) \to (p \vee r) \Big) \quad \leftrightarrow \quad \Big((\neg r) \to p \Big)$$

2.4 Еквивалентност на съставни съждения

Съставно съждение, чиято стойност е T за всяка валюация на простите му съждения, се нарича *тавтология*. Съставно съждение, чиято стойност е F за всяка валюация на простите му съждения, се нарича *противоречие*. Съставно съждение, чиято стойност е T за поне една валюация и F за поне една валюация на простите му съждения, се нарича *условност*. Лесно се вижда, че съставно съждение е условност тогава и само тогава, когато не е нито тавтология, нито противоречие.

Елементарен пример за тавтология е $p \vee \neg p$, елементарен пример за противоречие е $p \wedge \neg p$:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

Ясно е, че колоната на всяка тавтология се състои само от T, на всяко противоречие, само от F, а колоната на всяка условност съдържа поне едно T и поне едно F. Следователно, съждението $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ е условност, както се вижда от Таблица 1 на стр. 7.

Да разгледаме съждението $p \vee (q \wedge r)$ и неговата таблица на истинност:

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
F	F	F	F	F
F	F	T	F	F
F	T	F	F	F
F	T	T	T	T
T	F	F	F	T
T	F	T	F	T
T	T	F	F	T
T	T	T	T	T

Таблица 2

Сравнете Таблица 1 с Таблица 2. За всяка валюация, стойността на $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ е същата като стойността на $p \vee (q \wedge r)$. Имаме право да кажем, че всъщност това е едно и също съждение, написано по различни начини.

Определение 1. *За всеки две съставни съждения* s *и* t *казваме, че* s *и* t *са* еквивалентни, *тогава и само тогава, когато съждението* $s \leftrightarrow t$ *е тавтология. Фактът, че* s *и* t *са еквивалентни, се бележи с* $s \equiv t$.[†] □

[†]В някои книги се използва символът "$\Leftrightarrow$" наместо "$\equiv$".

Забележка: Символът "$\equiv$" не е логически съюз, така че "$s \equiv t$" не е съставно съждение на s и t.

Ще покажем, че $(p \to q) \wedge p \equiv p \wedge q$:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$p \wedge q$
F	F	T	F	F
F	T	T	F	F
T	F	F	F	F
T	T	T	T	T

Сами покажете, че $p \to q \equiv \neg p \vee q$. Този резултат позволява да заместим всяка импликация, било на прости, било на съставни съждения, с дизюнкция от негацията на първото съждение и второто съждение.

Сами покажете, че $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$. Имайки предвид този резултат, когато доказваме твърдения от типа

A тогава и само тогава, когато B

често извършваме доказателството на два етапа: първо доказваме импликацията

От A следва B

и после доказваме импликацията

От B следва A

Теорема 1. *Нека p, q и r са произволни съждения. Следните еквивалентности са в сила:*

свойства на константите: $p \wedge T \equiv p, \quad p \vee F \equiv p, \quad p \vee T \equiv T, \quad p \wedge F \equiv F.$

свойства на отрицанието: $p \wedge \neg p \equiv F, \quad p \vee \neg p \equiv T.$

идемпотентност: $p \vee p \equiv p, \quad p \wedge p \equiv p.$

закон за двойното отрицание: $\neg(\neg p) \equiv p.$

комутативност: $p \vee q \equiv q \vee p, \quad p \wedge q \equiv q \wedge p.$

асоциативност: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r), \quad (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$

дистрибутивност: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee r) \wedge (p \vee r), \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge r) \vee (p \wedge r).$

закони на Де Морган: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$

поглъщане: $p \vee (p \wedge q) \equiv p, \quad p \wedge (p \vee q) \equiv p.$ $\square$

Всяко от тези свойства може лесно да се докаже чрез таблица на истинност. Съществува и друг начин за доказване на еквивалентости – чрез еквивалентни преобразувания. Като пример ще покажем, че $(p \to q) \vee (q \to r) \equiv T$.

$(p \to q) \vee (q \to r) \equiv$ (тъй като $s \to t \equiv \neg s \vee t$)

$(\neg p \vee q) \vee (\neg q \vee r) \equiv$ (асоциативност на дизюнкцията)

$\neg p \vee q \vee \neg q \vee r \equiv$ (комутативност на дизюнкцията)

$\neg q \vee q \vee \neg p \vee r \equiv$ (асоциативност на дизюнкцията)

$(\neg q \vee q) \vee (\neg p \vee r) \equiv$ (свойства на отрицанието)

$T \vee (\neg p \vee r) \equiv$ (свойства на константите)

T

При доказателство чрез еквивалентни преобразувания на първия ред пишем едно от съжденията, в случая $(p \to q) \vee (q \to r) \equiv \mathsf{T}$. След това пишем знака за еквивалентност "$\equiv$" и след него в скоби основанието, поради което твърдим, че написаното на втория ред е еквивалентно на написаното на първия ред. В случая, основанието е вече доказаната еквивалентност между $s \to t$ и $\neg s \vee t$ за произволни съждения s и t. С червено са написани тези съждения на първия ред, които биват заменени с еквиваленти съждения при прехода от първи към втори ред. И така нататък, до последния ред, който съдържа буквално това, на което искаме да покажем, че първоначалното съждение е еквивалентно, а именно T.

Можехме да покажем $(p \to q) \vee (q \to r) \equiv \mathsf{T}$ и чрез таблица с 8 реда. Трудно е да се каже кой начин за доказване е по-икономичен в случая: дали с преобразувания, или с таблица. Но да си представим, че трябва да докажем следната еквивалентност:

$$(p \to q) \vee (q \to r) \vee \big((\neg r \to s) \oplus (t \to \neg u)\big) \equiv \mathsf{T}$$

Тук имаме 6 прости съждения. Ако започнем да доказваме с таблица на ръка, тя ще има $2^6 = 64$ реда и попълването ѝ би било бавно, досадно и може би грешно, защото колкото повече клетки за попълване има, толкова по-вероятно е човек да сбърка някъде. От друга страна, ако забележим, че изразът вляво на "$\equiv$" е от вида (за някакво A):

$$\underbrace{(p \to q) \vee (q \to r)}_{\text{съгласно предното д-во, това е еквивалентно на } \mathsf{T}} \qquad \vee \qquad A$$

можем да го преобразуваме в еквивалентния му

$$\mathsf{T} \vee A$$

можем веднага да твърдим, че изразът е еквивалентен на T поради свойствата на константите. Това доказателство чрез преобразувания е със сигурност по-кратко и икономично от евентуално доказателство чрез таблица.

Видяхме едно предимство на метода с преобразуванията: той може да е много по-ефикасен от табличния метод. Но табличният метод има на свой ред едно предимство – той не изисква досетливост. Той е *алгоритмичен*, което означава, че лесно може да се имплементира с компютърна програма. За разлика от него, методът с преобразуванията може да иска досетливост – в дадена ситуация, едно преобразувание може да води към успешно доказателство, а друго преобразувание да е безсмислено усилие, водещо доникъде. Като пример ще дадем два опита за доказателство на закона за поглъщането чрез преобразувания. Първият опит е неуспешен, той води до "въртене в кръг". Вторият е успешен.

Първи опит:

$$\begin{aligned}
&p \vee (p \wedge q) \equiv \quad \text{(дистрибутивност)}\\
&(p \vee p) \wedge (p \vee q) \equiv \quad \text{(идемпотентност)}\\
&p \wedge (p \vee q) \equiv \quad \text{(дистрибутивност)}\\
&(p \wedge p) \vee (p \wedge q) \equiv \quad \text{(идемпотентност)}\\
&p \vee (p \wedge q) \quad \text{нищо не сме постигнали, получихме това, от което започнахме}
\end{aligned}$$

Втори опит:

$$
\begin{aligned}
&p \lor (p \land q) \equiv \quad \text{(съгласно св-вата на константите)}\\
&(p \land T) \lor (p \land q) \equiv \quad \text{(съгласно дистрибутивн. на конюнк. спрямо дизюнк.)}\\
&p \land (T \lor q) \equiv \quad \text{(съгласно св-вата на константите)}\\
&p \land T \equiv \quad \text{(съгласно св-вата на константите)}\\
&p \quad \text{успех!}
\end{aligned}
$$

Как да се досети човек да започне, заменяйки p с еквивалентното му $p \lor T$? За съжаление, рецепта за общия случай няма. Доказателствата чрез преобразувания изискват добра интуиция.

2.5 Извод в съждителната логика

Определение 2. *Нека* p *и* q *са произволни съждения. Казваме, че* q следва логически от p, *ако* $p \to q$ *е тавтология. Фактът, че* q *следва логически от* p, *бележим така:* $p \vdash q$†. □

Забележка: Символът "$\vdash$" не е логически съюз, така че "$p \vdash q$" не е съставно съждение на p и q.

Определение 3. Извод *в съждителната логика е последователност от съждения* p_1, p_2, …, p_n, q *за някое* $n \geq 1$. *Съжденията* p_1, p_2, …, p_n *са* предпоставки, *а* q *е* следствие‡. *Изводът да е* валиден *означава, че следствието е вярно тогава, когато всички предпоставки са верни.* □

Забележка: Ако поне една предпоставка p_i е лъжа, то $p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n$ е лъжа и тогава $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$ е истина независимо от истинността на q, следователно изводът винаги е валиден при наличие на поне една предпоставка–лъжа. От друга страна, ако всички предпоставки са истина, то q трябва да е истина, за да имаме валиден извод. Съгласно таблицата на истинност на импликацията, изводът е валиден тогава и само тогава, когато импликацията

$$(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$$

е тавтология. Съгласно Определение 2, споменатия извод можем да запишем като

$$(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \vdash q$$

Прието е изводът да се записва така: предпоставките се изреждат една над друга, под тях се записва хоризонтална черта, под нея се записва следствието, предхождано от символа "$\therefore$", който се чете "поради това". Вижте следващия пример. Да разгледаме извода от началото на лекцията:

Ако вали дъжд, Иван носи чадър.
Вали дъжд.
Следователно, Иван носи чадър.

†В някои книги се използва символът "$\Rightarrow$" наместо "$\vdash$".

‡На английски съответните термини са *premises* и *conclusion*.

Формално ще го запишем така:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Този извод е валиден – лесно можем да покажем с таблица, че $(p \to q) \land p \to q$ е тавтология:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \land p$	$(p \to q) \land p \to q$
F	F	T	F	T
F	T	T	F	T
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

Също толкова лесно можем да покажем с таблица, че следния извод **не е валиден**:

$$\begin{array}{c} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

Ето как изглежда таблицата:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \land q$	$(p \to q) \land q \to p$
F	F	T	F	T
F	T	T	T	F
T	F	F	F	T
T	T	T	T	T

За по-сложни изводи табличният метод не е пригоден, по същите причини, които вече споменахме при доказателствата за еквивалентност: таблицата става прекалено голяма. Удобно е да се ползват следните правила за извод в съждителната логика. Всяко от тези правила може да бъде доказано чрез таблица. С тяхна помощ и с известна доза досетливост можем, започвайки от дадени предпоставки, да изведем следствието.

Правило modus ponens: $p \land (p \to q) \vdash q$

Правило modus tolens: $\neg q \land (p \to q) \vdash \neg p$

Правило хипотетичен силогизъм: $(p \to q) \land (q \to r) \vdash (p \to r)$

Правило дизюнктивен силогизъм: $\big((p \lor q) \land \neg p\big) \vdash q$

Правило за конюнкцията $p \land q \vdash p \land q$[†]

Правило за опростяване: $p \land q \vdash p$

Правило за доказателство чрез случаи: $\big((p \to r) \land (q \to r)\big) \vdash \big((p \lor q) \to r\big)$

Правило за конструктивната дилема: $\big((p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r)\big) \vdash (q \lor s)$

[†]Написано така, правилото изглежда безсмислено. Идеята е, че ако **независимо** изведем от едни и същи предпоставки и p, и q, имаме право да твърдим, че конюнкцията $p \land q$ е истина и можем да я използваме.

Правило за деструктивната дилема: $\big((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (\neg q \vee \neg s)\big) \vdash (\neg p \vee \neg r)$

Правило за резолюцията: $\big((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)\big) \vdash (q \vee r)$

Подчертаваме, че правилата за извод са **различно нещо** от еквивалентностите (виж стр. 1). Еквивалентостите може да се ползват при извод – имаме право да заменим израз с друг, еквивалентен на него. Но правилата за извод не може да се ползват при доказателства на еквивалентност. Примерно, забележете при правилото modus ponens, че $p \wedge (p \to q)$ **не е еквивалентно съждение** на q.

Ще дадем пример за правене на извод чрез правилата за извод: ще покажем, че от предпоставките *Диана кара ски или не вали сняг* и *Живко играе футбол или вали сняг* следва логически, че *Диана кара ски или Живко играе футбол.* Нека p, q и r са следните елементарни съждения:

p: Диана кара ски

q: Вали сняг

r: Живко играе футбол

Трябва да докажем, че изводът

$$\begin{array}{r} p \vee \neg q \\ r \vee q \\ \hline \therefore p \vee r \end{array}$$

е валиден. Но това е директно приложение на резолюция върху предпоставките. Заключаваме, че изводът е валиден.

3 Предикатна логика

Определение 4. Едноместен предикат *е съждение, в което има "празно място", в което празно място се слага обект от някаква предварително зададена област, наречена* домейн. *За всеки обект от домейна, предикатът е или истина, или лъжа.* □

Като пример, нека домейнът се състои от плодовете

ябълка, банан, портокал, авокадо, ягода

Нека ябълката и авокадото са зелени, бананът е жълт, портокалът е оранжев, а ягодата е червена. Да разгледаме съжденията:

1. Ябълката е червена.
2. Бананът е червен.
3. Портокалът е червен.
4. Авокадото е червено.
5. Ягодата е червена.

Съгласно допусканията, първите четири съждения са лъжа, а последното е истина.

Сега да си представим, че от всяко от тези съждения сме махнали името на плода и сме го заменили с многоточие "...". И в петте случая[†] получаваме

$$\ldots \text{ е червен.} \tag{1}$$

Това е едноместен предикат, чийто домейн са петте изброени плода. Празното място, за което се говори в Определение 4, е многоточието. На мястото на многоточието можем да слагаме име на плод и за всяко име на плод, твърдението е или истина, или лъжа.

Наместо да слагаме точки или подчертавка на празното място в съждението, удобно е да използваме променлива, примерно x. Тогава предикатът става "x е червен(а)", където x взема стойности от указаната област. Да бележим този предикат с "$P(x)$". При текущите допускания,

- $P(\text{ягода}) \equiv T$,
- $P(\text{ябълка}) \equiv F$, $P(\text{банан}) \equiv F$, $P(\text{портокал}) \equiv F$, $P(\text{авокадо}) \equiv F$.

Подчертаваме, че предикатът $P(x)$ сам по себе си не е нито истина, нито лъжа. Истина или лъжа се получава само след заместване на x с някой обект от областта. Особен интерес представляват два случая при такова заместване:

- когато има поне един обект, за който предикатът е истина. Това бележим с $\exists x P(x)$.
- когато за всеки обект предикатът е истина. Това бележим с $\forall x P(x)$.

Символите "$\exists$" и "$\forall$" се наричат *квантори*. $\exists$ е *екзистенциалният квантор*, а $\forall$ е *универсалният квантор*. Ако обектите от областта са краен брой, да речем a_1, a_2, ..., a_n, то

- $\exists x P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$, а
- $\forall x P(x)$ има смисъл на $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

Това илюстрира факта, че екзистенцилният квантор е свързан с дизюнкцията, а универсалният, с конюнкцията.

Ще илюстрираме ползата от използването на предикати с квантори. Да разгледаме следния тривиален извод:

> Всяка риба живее във водата. Пъстървата е риба. Следователно, пъстървата живее във водата.

От най-общи съображения е ясно, че изводът е валиден. Но ако се опитаме да формализираме нещата със съждителна логика (като в предните секции), няма как да покажем валидността на извода. Нека заместим първото изречение с p, второто, с q, и третото, с r. За да покажем, че изводът е валиден, трябва да покажем $p \wedge q \vdash r$, което не е валиден извод. Валидността на извода се вижда, когато се вгледаме в структурата на изреченията, а не ги разглеждаме просто като елементарни съждения без структура. Първото изречение казва, че за всяко нещо (от някаква област, примерно животни), ако това нещо е риба, то то живее във водата. Нека $P(x)$ е предикатът "x е риба", а $Q(x)$ е предикатът "x живее във водата". Тогава първото изречение се формализира така:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

[†]Родът на думата няма значение, така че "... е червен" се счита за същото като "... е червена".

Нека t означава пъстърва. Второто изречение е $P(t)$. Като цяло, изводът е

$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ P(t) \\ \hline \therefore Q(t) \end{array}$$

Когато е използван квантор върху някаква променлива, казваме, че тя е *свързана*. Примерно, в израза "$\forall x P(x)$", променливата x е свързана. Ако дадена променлива не е свързана, казваме, че тя е *свободна*. Както казахме вече, изрази от предикатната логика със свободни променливи не може да са нито истина, нито лъжа. Приемаме, че когато записваме изрази с квантори, кванторите имат по-висок приоритет, тоест свързват по-силно, от логическите съюзи. Следователно, в израза

$$\forall x P(x) \to Q(x)$$

действтието на квантора не се простира върху $Q(x)$ и x е свободна променлива в $Q(x)$. Следователно, последният израз не може да има стойност истина или лъжа. Забележете разликата с израза "$\forall x(P(x) \to Q(x))$" горе, където скобите след $\forall x$ указват, че действието на квантора се простира върху $P(x) \to Q(x)$, а не само върху $P(x)$. С цел по-голяма яснота ще повторим последните съображения:

$$\forall x \underbrace{(P(x) \to Q(x))}_{\text{обхват на действие на квантора}}$$

$$\forall x \underbrace{P(x)}_{\text{обхват на действие на квантора}} \to Q(x)$$

Предикатите могат да има повече от едно празни места за попълване. Иначе казано, да двуместни, триместни и т. н. Да се върнем на примера с плодовете. Нека в предикат (1) на предишната страница заместим с многоточие и думата "червен". Получаваме

$$\ldots \text{ е } \ldots . \tag{2}$$

На мястото на второто многоточие можем да слагаме име на цвят. По този начин, замествайки първото многоточие с име на плод и второто, с име на цвят, получаваме съждения, които са истина или лъжа. Удобно е да се използват имена на променливи наместо многоточия, за да не се налага да уточняваме "първото многоточие" и "второто многоточие". И така, наместо първото многоточие ползваме променливата x, и наместо второто, y. Получаваме двуместния предикат $P(x, y)$

$$P(x, y): \quad x \text{ е } y.$$

където x взема стойности име на плод, а y взема стойност име на цвят. Примерно, съгласно допусканията за цветовете на плодовете, $P(x, y) \equiv T$ когато x е банан и y е жълто, а $P(x, y) \equiv F$ когато x е ягода и y е зелено.

Квантори се използват и при предикатите с повече от една променлива. Типична употреба е, примерно, $\forall x \forall y P(x, y)$. Това се чете, "за всяко x, за всяко y, $P(x, y)$". Ако P е предикатът от примера с плодовете и цветовете, то $\forall x \forall y P(x, y)$ е лъжа, тъй като не е вярно, че ако вземем кой да е плод и кой да е цвят, този плод задължително е от този цвят – примерно, бананът не е червен, тоест $P(\text{банан}, \text{червен})$ е лъжа.

В израза $\forall x \forall y P(x, y)$ казваме, че кванторите са *вложени*. Може да имаме вложени квантори от различен вид, примерно $\forall x \exists y P(x, y)$. Това се чете, "за всяко x съществува y, такова че $P(x, y)$". Ако отново ползваме примера с плодовете и цветовете, $\forall x \exists y P(x, y)$ е истина. За да се убедим, че е така, достатъчно е да съобразим, че всеки плод има някакъв цвят.

Еднотипни квантори могат да бъдат размествани без това да се отразява на истинността, тоест винаги

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$
$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

От друга страна, разнотипни квантори не може да бъдат размествани по този начин. Тоест, в общия случай,

$$\forall x \exists y P(x, y) \not\equiv \exists y \forall x P(x, y)$$
$$\exists x \forall y P(x, y) \not\equiv \forall y \exists x P(x, y)$$

Като пример да разгледаме двуместния предикат

$$Q(x, y): \quad x + y = 2$$

където x и y вземат стойности от множеството на реалните числа. $\forall x \exists y Q(x, y)$ очевидно е истина, понеже за всяко реално x има друго реално y, а именно $y = 2 - x$, такива че $x + y = 2$. От друга страна, $\exists y \forall x Q(x, y)$ е лъжа, понеже няма реално число, такова че всяко друго реално, събрано с него, да дава сбор 2.

Аналогично, в примера с плодовете и цветовете, $\forall x \exists y P(x, y)$ е истина, както вече казахме, докато $\exists y \forall x P(x, y)$. Вторият израз би бил истина, ако всички плодове бяха в един и същи цвят.

Забележете, че в "$\forall x P(x, y)$", y е свободна променлива, понеже не попада в обхвата на действие на квантор. Следователно, това не може да бъде нито истина, нито лъжа.

Забележе, че за всеки предикат $P(x, y)$, изразът $\forall x \exists y P(x, y)$ е еквивалентен на $\forall y \exists x P(y, x)$, тъй като това е просто преименуване на променливите. Примерно, в предиката с многоточията (2) на предната страница, няма значение дали наричаме с x първото многоточие и с y, второто, или обратно.

Отрицания на изрази с едноместни предикати се извършват по следния начин: отрицанието превръща универсалния квантор в екзизстенциален и обратното.

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x) \tag{3}$$
$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x) \tag{4}$$
$$\tag{5}$$

"$\neg \forall x P(x)$" се чете, "не е вярно, че за всяко x от дадения домейн е изпълнено $P(x)$". "$\exists x \neg P(x)$" се чете, "съществува x от дадения домейн, за който е изпълнено $\neg P(x)$". "$\neg \exists x P(x)$" се чете, "не е вярно, че съществува x от дадения домейн, за което е изпълнено $P(x)$". "$\forall x \neg P(x)$" се чете, "за всяко x от дадения домейн е изпълнено $\neg P(x)$".

Ще обосновем не много формално (3). За да се убедим, че двата израза са еквивалентни, можем да разгледаме случай, в който домейнът е краен, да речем домейнът е a_1, a_2, ..., a_n, и да съобразим, че

$$\forall x P(x) \equiv P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$$

Съгласно законите на De Morgan,

$$\neg(P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n)) \equiv \neg P(a_1) \lor \neg P(a_2) \lor \ldots \lor \neg P(a_n)$$

На свой ред,

$$\neg P(a_1) \lor \neg P(a_2) \lor \ldots \lor \neg P(a_n) \equiv \exists x \neg P(x)$$

Обосновката на (4) е аналогична.

Да разгледаме четирите твърдения:

- $\forall x(P(x) \land Q(x)) \equiv \forall x(P(x)) \land \forall x(Q(x))$
- $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \forall x(P(x)) \lor \forall x(Q(x))$
- $\exists x(P(x) \land Q(x)) \equiv \exists x(P(x)) \land \forall x(Q(x))$
- $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \equiv \exists x(P(x)) \lor \forall x(Q(x))$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са произволни едноместни предикати и променливата x винаги приема стойности от един и същи домейн. Кои от тези твърдения са верни и кои, не? Първото твърдение е вярно. За да се убедим в това, да разгледаме случая, когато домейнът е краен, да речем a_1, a_2, …, a_n. Тогава изразът отляво е

$$(P(a_1) \land Q(a_1)) \land (P(a_2) \land Q(a_2)) \land \ldots \land (P(a_n) \land Q(a_n))$$

Поради асоциативността и комутативността на конюнкцията, той е еквивалентен на

$$\big(P(a_1) \land P(a_2) \land \ldots \land P(a_n)\big) \land \big(Q(a_1) \land Q(a_2) \land \ldots \land Q(a_n)\big)$$

Второто твърдение е невярно. Например, нека $P(x)$ и $Q(x)$ са предикати с един и същи домейн—многоъгълниците от геометрията—като $P(x)$ е "x има четен брой страни", а $Q(x)$ е "x има нечетен брой страни". Очевидно $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ е истина, понеже всеки многоъгълник има четен или нечетен брой страни. Обаче $\forall x(P(x)) \lor \forall x(Q(x))$ не е вярно. За да се убедим в това, да разгледаме поотделно двете съждения-участници в дизюнкцията:

- $\forall x(P(x))$ не е вярно, понеже не всеки многоъгълник има четен брой страни.
- $\forall x(Q(x))$ не е вярно, понеже не всеки многоъгълник има нечетен брой страни.

Щом двете съждения в дизюнкцията са лъжа, дизюнкцията е лъжа. С аналогични съображения се вижда, че третото твърдение не е вярно, а четвъртото е вярно. Следователно, в някакъв смисъл универсалният квантор има дистрибутивно свойство спрямо конюнкцията, а екзистенциалният, спрямо дизюнкцията.