

Лекция 4: Функции

Минко Марков

minkom@fmi.uni-sofia.bg

Факултет по Математика и Информатика
Софийски Университет "Свети Климент Охридски"

12 април 2020 г.

Определение 1 (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува не повече от едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение 2 (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че за всяко $x \in X$ съществува точно едно $y \in Y$, такава че $(x, y) \in f$.

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \left((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \right. \\ \left. ((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)) \right)$$

Или по-просто

Определение (Частична функция)

Нека X и Y са множества. Частична функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

$$\forall x \in X \left((\neg \exists y \in Y : (x, y) \in f) \vee \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z)) \right)$$

Определение (Тотална функция)

Нека X и Y са множества. Тотална функция с домейн X и кодомейн Y е всяка релация $f \subseteq X \times Y$, такава че

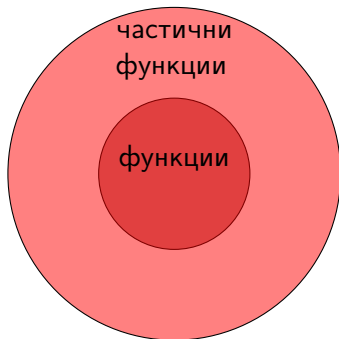
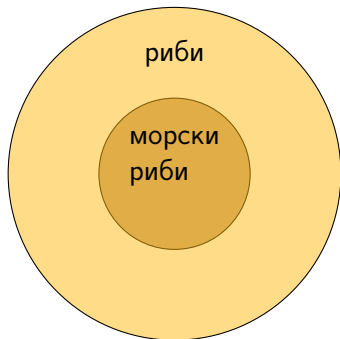
$$\forall x \in X \left((\exists y \in Y : (x, y) \in f) \wedge \right. \\ \left. (\forall w, z \in Y : (x, w) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow w = z) \right)$$

Частични функции и функции

Тоталните функции се срещат по-често в практиката, затова само “функция” е “тотална функция”. При дадени X и Y , очевидно тоталните са строго подмножество на частичните. Следователно, само “функция” е частен случай на “частична функция”: всяка функция е частична функция, но не всяка частична функция е функция.

Това води до противоречие с приетото разбиране за прилагателните, с които отделяме подмножества като в аксиомата за отделянето.

Частични функции и функции (2)



На практика често казваме “изображение” (mapping) вместо “функция”. Това обаче не е определение: а какво е “изображение”?

Предпочитаме да не въвеждаме “функция” като ново първично понятие, а да използваме вече изградени понятия и да дефинираме “функция” чрез тях.

И така, формално, функция е вид релация.

Типични записи на функции

Наместо $f \subseteq X \times Y$, пишем $f : X \rightarrow Y$. Чете се “ f е функция с домейн X и кодомейн Y ”. Още може да се чете и като “ f изобразява X в Y ”.

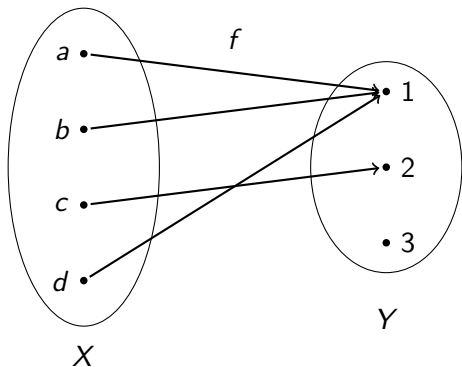
Наместо $(x, y) \in f$ или инфиксния запис $x f y$, в контекста на функциите ползваме добре известния запис $f(x) = y$. “ x ” е *променлива*. Променлива е нещо като кутийка, в която можем да слагаме неща (от домейна).

Свикнали сме да мислим за функциите на много променливи като за обобщение на функциите на една променлива. Но всяка функция на k променливи в някакъв смисъл е функция на една променлива, която обаче е наредена k -орка.

Пример: някаква реална функция на две променливи. Типичен запис е $g(x, y) = z$, където x , y и z са реални. Тогава $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Можем да мислим за g като функция на една променлива, която не е реално число, а наредена двойка от реални числа. Формално правилният запис би бил $g((x, y)) = z$, където $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но това не се ползва.

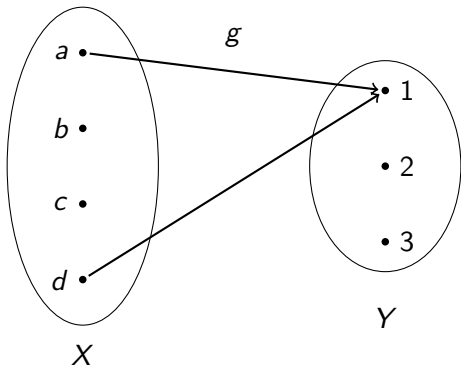
Представяне на функция с диаграма

Нека $f : X \rightarrow Y$, като X и Y са крайни. Да кажем, $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$. От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза точно една стрелка.



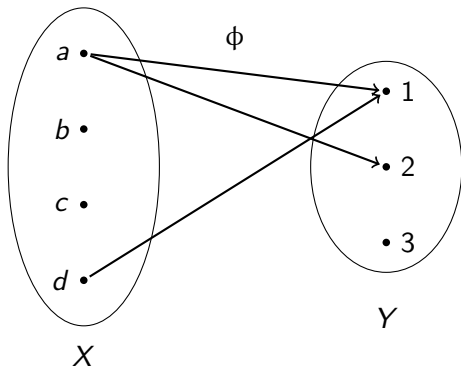
Представяне на частична функция с диаграма

Нека g е частична функция с домейн X и кодомейн Y . От всяка точка в елипсата, отговаряща на X , излиза не повече от една стрелка.



Диаграма на релация, която не е частична функция

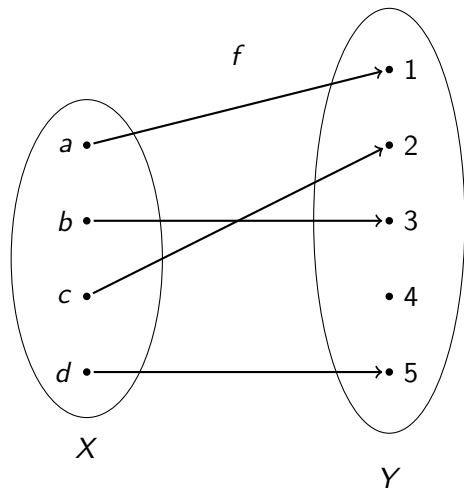
Ако от поне една точка в елипсата, отговаряща на X , излиза повече от една стрелка, това не може да е диаграма на частична функция (оттам, и на тотална). Това е диаграма на релация ϕ с първи домейн X и втори домейн Y .



Инекции, сюрекции, биекции

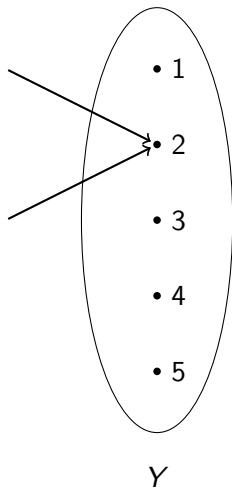
Инекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е *инекция*, ако
 $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$.



Инекции, сюрекции, биекции

Контрапример за инекция

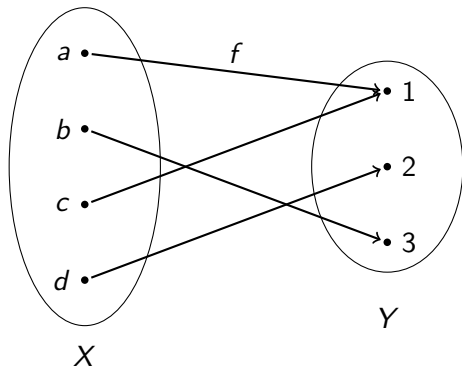


Инекции, сюрекции, биекции

Сюрекции

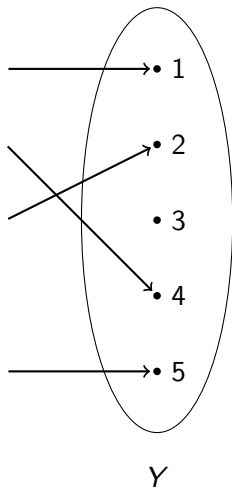
Нека $f : X \rightarrow Y$. f е сюрекция, ако $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$.

Неформално: кодомейнът да бъде “покрит” от изображението.



Инекции, сюрекции, биекции

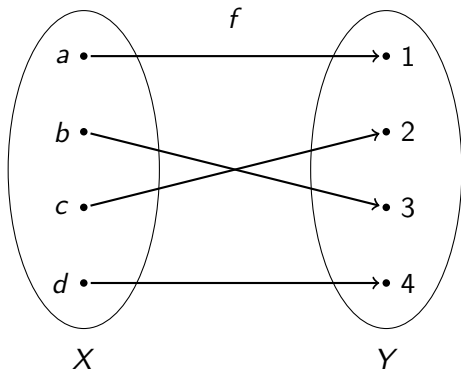
Контрапример за сюрекция



Инекции, сюрекции, биекции

Биекции

Нека $f : X \rightarrow Y$. f е биекция, ако е инекция и сюрекция. Още се казва *взаимно еднозначно изображение*.



Инекции, сюрекции, биекции – пример

Сядането на хора в зала е частична функция с домейн хората и кодомейн столовете, ако никой не седи на повече от един стол; възможно е да има правостоящи.

Ако няма правостоящи, сядането е функция.

Ако на никой стол не седи повече от един човек, сядането е инекция.

Ако няма празни столове, сядането е сюрекция.

Ако всеки човек седи на отделен стол и няма празни столове, сядането е биекция. Очевидно броят на столовете е равен на броя на хората.

Все още не сме въвели формално “крайно множество” и “брой на елементи на крайно множество”, но интуитивно всеки разбира за какво става дума.

Нека $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Нека $f : X \rightarrow Y$.

Необходимо условие f да е инекция е $m \leq n$. Необходимо условие f да е сюрекция е $m \geq n$. Необходимо условие f да е биекция е $m = n$.

Иначе казано, при $m > n$ няма инекция, при $m < n$ няма сюрекция, при $m \neq n$ няма биекция.

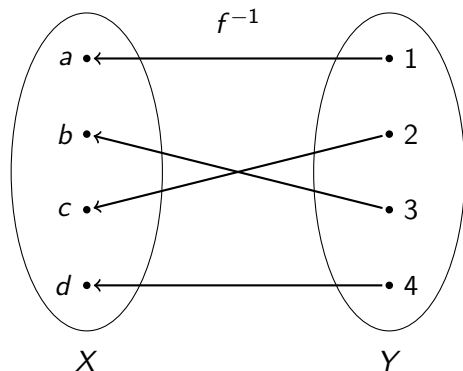
Обратна функция на биекция

Нека $f : X \rightarrow Y$ е биекция. Обратната функция на f се бележи с f^{-1} . Тя е с домейн Y и кодомейн X и се дефинира така:

$\forall y \in Y : f^{-1}(y) = x$, където x е уникалният елемент на X ,
такъв че $f(x) = y$

Обратна функция на биекция – пример

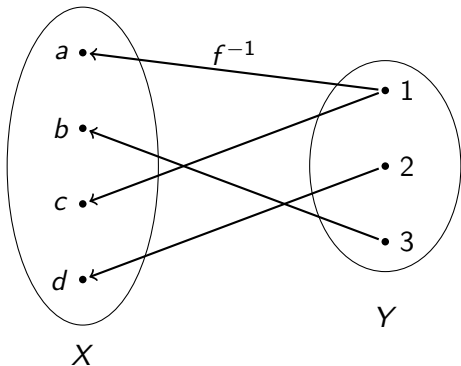
Нека f е биекцията от слайд 17. Нейната обратна функция е следната:



Обратна функция на функция

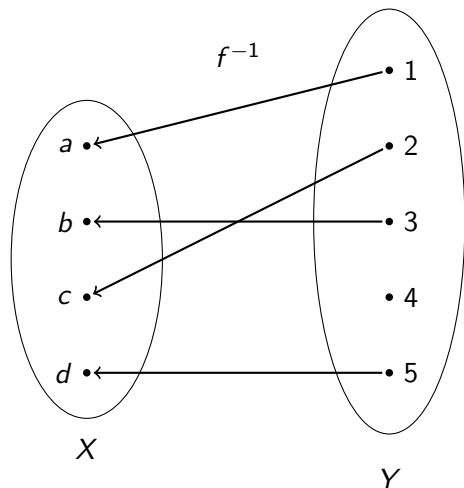
Образно казано, обратната функция има диаграма с разменени домейн и кодомейн и обърнати посоки на стрелките.

Ако опитаме да “обърнем” функция, която не е инекция, ще получим обект, който дори не е **функция**. Ето какво ще получим, ако се опитаме да “обърнем” сюрекцията от слайд 15:



Обратна функция на функция (2)

Ако обърнем произволна инекция, ще получим частична функция, която не е непременно функция. Ето какво ще получим, ако се опитае да “обърнем” инекцията от слайд 13:



Рестрикция на функция

Нека $f : X \rightarrow Y$ и $X' \subseteq X$. Рестрикцията на f върху X' е $f' : X' \rightarrow Y$, където $\forall x \in X' : f'(x) = f(x)$. Бележим рестрикцията така: $f|_{X'}$.

Понятието “рестрикция” може да се обобщи и за частични функции по естествения начин. Очевидно, всяка частична функция има рестрикция, която е функция – вземаме такова X' , че всеки елемент от X' да има изображение.

Крайни множества

Неправилна дефиниция

Забележете, че дефиницията “множество е крайно, ако има краен брой елементи” **не върши работа**. На практика тя казва “множество е крайно, ако е крайно”. Очевидно това е порочно зациклена дефиниция!

Дефинирането на “крайно множество” става чрез биекция между него и някое множество $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определение 3 (крайно множество, кардиналност)

Множество A е крайно, ако

- $A = \emptyset$, в който случай кардиналността на A е 0,
- или съществува $n \in \mathbb{N}^+$, такава че съществува биекция $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$; тогава кардиналността на A е n .

Кардиналността на A е броят на елементите и се бележи с $|A|$. “Мощност на множество” е синоним на “кардиналност на множество”. Множества са *равномощни*, ако между тях съществува биекция.

Определение 4 (безкрайно множество)

Множество е безкрайно, ако не е крайно.

Очевидно \mathbb{N} не е крайно: колкото и голямо естествено число n да вземем, $n + 1$ е по-голямо. Така че за всяко n е вярно, че $n + 1 \notin \{0, 1, \dots, n\}$.

Определение 5 (изброимо безкрайно множество)

Множество A е изброимо безкрайно, ако е равномошно на \mathbb{N} .

Определение 6 (изброимо множество)

Множество A е изброимо, ако A е крайно или изброимо безкрайно.

Определение 7 (неизброимо множество)

Множество е неизброимо, ако не е изброимо.

Очевидно всяко неизброимо множество е безкрайно. Не е очевидно, че съществуват неизброими множества.

За безкрайните множества (1)

Потенциална и актуална безкрайност

Естествените числа се генерират от процес, който започва от 0 с добавяне на единица: $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$, \dots , $1\,000\,000 + 1 = 1\,000\,001$, \dots . Аристотел характеризира този процес като “потенциална безкрайност”. Кулминацията на процеса, а именно множеството от всички естествени числа, е “пълна безкрайност”, или “актуална безкрайност”.

За безкрайните множества (2)

Потенциална и актуална безкрайност

От Аристотелово време чак до 19 век мнозинството от мислителите отхвърлят актуалната безкрайност като нелегитимно понятие. Гаус (Carl Friedrich Gauss), най-великия математик на своето време, пише:

But concerning your proof, I protest above all against the use of an infinite quantity as a *completed* one, which in mathematics is never allowed. The infinite is only *façon de parler*, in which one properly speaks of limits.

Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite,
Dauben, pp. 120

За безкрайните множества (3)

Потенциална и актуална безкрайност – допълнителна илюстрация на разликата

Редът на Лайбниц е

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Ако гледаме на сумата вдясно като на процес, който апроксимира $\frac{\pi}{4}$ все по-добре с добавяне на все повече събираеми, имаме предвид потенциална безкрайност. Тогава $\frac{\pi}{4}$ е само граница, по израза на Гаус, към която клони сумата, без да я достига никога. Тук и дума не става за пълна безкрайност: на всеки етап от сумирането сме събрали краен брой събираеми.

Ако гледаме на сумата вдясно като на едно цяло нещо, което е точно равно на $\frac{\pi}{4}$, имаме предвид актуална безкрайност.

За безкрайните множества (4)

Проблем при безкрайните множества: цялото е “равно” на своя част. “Равно” има смисъл на “равномощно”.

Примерно, множеството на естествените числа и множеството на четните числа $\{0, 2, \dots\}$ са равномощни. Интуитивно, естествените са повече, защото има естествени нечетни числа. От друга страна, биекцията $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, \dots\}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = 2n$$

съчетава точно естествените и четните числа.

Оттук и мнението, че да се говори за “броя на всички числа” е безсмислица.

За безкрайните множества (5)

Георг Кантор (Georg Cantor) е първият математик, който разглежда сериозно безкрайните множества и създава кохерентна и задълбочена теория за тях. Той въвежда понятия, имащи смисъл на бройки на елементите на безкрайни множества, и работи с тези понятия.

Кантор показва, че множества като \mathbb{Q} или множеството на алгебричните ирационални числа (като $\sqrt{2}$), които в днешната терминология са строги надмножества на \mathbb{N} , са равномошни с \mathbb{N} . След това показва, че \mathbb{R} не е равномошно на \mathbb{N} .

За безкрайните множества (6)

Основен резултат на Кантор е, че има различни видове безкрайност. И естествените, и реалните числа са безброй много, но реалните са повече в смисъл, че няма биекция между тях и естествените.

Теорема 1

Съществува биекция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: Твърди се, че има начин да бъдат изброени наредените двойки от естествени числа.

Разбиваме множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ на подмножества S_0, S_1, S_2, \dots по следния начин

$$\forall k \in \mathbb{N} : S_k = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = k\}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (2)

Изброяването е следното: при $i < j$, наредените двойки от S_i преди наредените двойки от S_j , а вътре във всяко S_i нареждаме двойките по нарастващ втори елемент:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) & (2,0) & (1,1) & (0,2) & (3,0) & (2,1) & (1,2) & (0,3) & \dots \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_0} & \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{S_1} & \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{S_2} & \underbrace{\hspace{4.5cm}}_{S_3} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (3)

Да си представим наредените двойки от естествени числа в безкрайна таблица.

| (a,b) | b | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| a | 0 | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | ... |
| 1 | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | ... | |
| 2 | (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) | ... | |
| 3 | (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | ... | |
| 4 | (4,0) | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) | ... | |
| 5 | : | : | : | : | : | : | : | : | |
| 6 | : | : | : | : | : | : | : | : | |
| | : | : | : | : | : | : | : | : | |

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (4)

Да групираме наредените двойки по диагонали.

(a,b) b

a

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | ... |
| 1 | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | ... |
| 2 | (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) | ... |
| 3 | (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | ... |
| 4 | (4,0) | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) | ... |
| 5 | . | . | . | . | . | . | . | ... |
| 6 | . | . | . | . | . | . | . | ... |

diag 0, diag 1, diag 2, diag 3, diag 4, diag 5

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (5)

Ето визуализация на изброяването

(a,b) b

a

начало

diag 0 diag 1 diag 2 diag 3 diag 4 diag 5

| | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0 | (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | ... |
| 1 | (1,0) | (1,1) | (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | (1,6) | ... |
| 2 | (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | (2,4) | (2,5) | (2,6) | ... |
| 3 | (3,0) | (3,1) | (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | ... |
| 4 | (4,0) | (4,1) | (4,2) | (4,3) | (4,4) | (4,5) | (4,6) | ... |
| 5 | . | . | . | . | . | . | . | . |
| 6 | . | . | . | . | . | . | . | . |

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (6)

Функцията на изброяването f

Да разгледаме следната функция $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f((a, b)) = \begin{cases} 0, & \text{ако } (a, b) = (0, 0) \\ \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

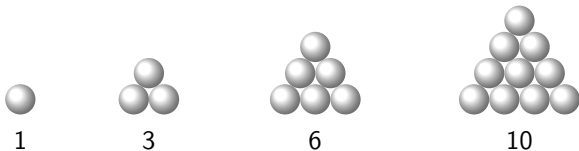
Това е **формалното** описание на функцията на изброяването, която въведохме на слайд 36 и илюстрирахме на слайд 39.

Ще докажем, че f е биекция.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (7)

Пояснения към функцията на изброяването (1)

Числата от вида $\frac{k(k+1)}{2}$ за $k \in \mathbb{N}$ се наричат *триъгълните числа*. В нарастващ ред на k , редицата от триъгълните числа започва така: 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ... Следната визуализация за $k > 0$ показва защо се наричат триъгълните числа .



Лесно се вижда, че триъгълните числа са точно сумите $\sum_{i=0}^k i$, за $k \in \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (8)

Пояснения към функцията на изброяването (2)

В израза $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} + b$, събираемото $\frac{(a+b)(a+b+1)}{2}$ е точно броят на наредените двойки във всички диагонали преди диагонал номер $a + b$. То е триъгълното число

$$\frac{(a+b)(a+b+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + (a+b)$$

Събираемото b е броят на елементите преди (a, b) в диагонал номер $a + b$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (9)

f е инекция

Да допуснем, че f не е инекция. Тогава съществуват наредени двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) , такива че $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ и $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Нека $a_1 + b_1 = m_1$ и $a_2 + b_2 = m_2$.

Случай 1: $m_1 \neq m_2$. БОО, нека $m_1 < m_2$. Тогава $\frac{m_1(m_1+1)}{2}$ и $\frac{m_2(m_2+1)}{2}$ са различни триъгълни числа, като $\frac{m_1(m_1+1)}{2} < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$. Но очевидно $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 < \frac{m_2(m_2+1)}{2}$ за $0 \leq b_1 \leq m_1$.
Противоречие.

Случай 2: $m_1 = m_2$. Тогава трябва b_1 да е различно от b_2 , иначе $a_1 = a_2$, което влече $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Щом $b_1 \neq b_2$ и $m_1 = m_2$, то $\frac{m_1(m_1+1)}{2} + b_1 \neq \frac{m_2(m_2+1)}{2} + b_2$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо (9)

f е сюрекция

Щом f е инекция, обратното ѝ изображение е дефинирано и то е частична функция. Очевидно следният алгоритъм реализира въпросното обратно изображение. Това, че всяко естествено число е образ на някоя наредена двойка по отношение на изображението f доказва, че f е сюрекция (обратното изображение е **тотална** функция).

```
if (n == 0) {a = 0; b = 0;}
else {c = 1;
      while (c <= n) {n = n - c; c ++;}
      a = c - 1 - n; b = n;}
return (a, b);
```

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (1)

Теорема 2

Не съществува биекция $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

Доказателство: В доказателството на Теорема 1 беше достатъчно да покажем само един начин за изброяване. Сега обаче не е достатъчно да покажем, че един определен начин за изброяване “не работи”. Сега се иска да покажем, че **никой** начин за изброяване “не работи”. Ще извършим доказателството с допускане на противното. Допускаме, че $2^{\mathbb{N}}$ е изброимо, тоест, съществува биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (2)

Характеристична редица е безкрайна булева редица (a_0, a_1, a_2, \dots) , която характеризира, или определя, дадено подмножество X на \mathbb{N} по следното правило. За всяко $n \in \mathbb{N}$:

- ако $a_n = 1$, то n се съдържа в X ,
- ако $a_n = 0$, то n не се съдържа в X .

Ето няколко примера за характеристични редици и подмножествата на \mathbb{N} , които определят:

- $(0, 0, 0, \dots)$ */*само нули*/* определя празното множество;
- $(1, 1, 1, \dots)$ */*(само единици)*/* определя самото \mathbb{N} ;
- $(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ */*(повтаряне на 10)*/* определя четните числа;
- $(0, 1, 1, 0, 0, \dots)$ */*(само две единици)*/* определя $\{1, 2\}$.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (3)

Съществува очевидна биекция между характеристичните редици и подмножествата на \mathbb{N} .

Твърдението “подмножествата на \mathbb{N} могат да бъдат изброени” става “характеристичните редици на \mathbb{N} могат да бъдат изброени”. Това е допускането, което ще опровергаем.

Допускаме изброяване на характеристичните редици: A_0, A_1, \dots , като всяка характеристична редица се появява точно веднъж. Нека $A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, \dots)$, $A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, \dots)$, и така нататък. Представяме си ги написани в безкрайна колона:

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

...

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (5)

Разглеждаме главния диагонал: редицата

$$X = (a_{0,0}, a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \dots).$$

$$A_0 = (a_{0,0}, a_{0,1}, a_{0,2}, a_{0,3}, \dots)$$

$$A_1 = (a_{1,0}, a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, \dots)$$

$$A_2 = (a_{2,0}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \dots)$$

$$A_3 = (a_{3,0}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, \dots)$$

...

Образуваме нейната “побитова инверсия”, редицата

$$\bar{X} = (\overline{a_{0,0}}, \overline{a_{1,1}}, \overline{a_{2,2}}, \overline{a_{3,3}}, \dots).$$

За всяко i, j , $\overline{a_{i,j}} = 0$, ако $a_{i,j} = 1$, и обратно.

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (6)

Щом всяка булева числова редица се среща в изброяването (колоната), трябва и \overline{X} да се среща. Но \overline{X} не може да е A_0 , защото се различават в поне една позиция – нулевата. Ако $a_{0,0} = 0$, то $\overline{a_{0,0}} = 1$; ако $a_{0,0} = 1$, то $\overline{a_{0,0}} = 0$.

Аналогично, \overline{X} не може да е A_1 , защото се различават в първата позиция, \overline{X} не може да е A_2 , защото се различават във втората позиция, и така нататък.

Тогава \overline{X} не се среща в колоната; иначе казано, подмножеството B на \mathbb{N} , съответстващо на \overline{X} , няма образ в хипотетичната биекция $h : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$. □

Теорема 3

За всяко множество A , не съществува сюрекция $g : A \rightarrow 2^A$.

Да допуснем противното. Тогава съществува A , такова че съществува сюрекция $g : A \rightarrow 2^A$. Разглеждаме множеството

$$S = \{a \in A \mid a \notin g(a)\} \quad (1)$$

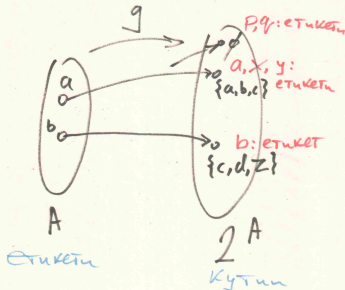
Но $S \in 2^A$ и g е сюрекция, следователно $\exists x \in A : g(x) = S$.

Дали $x \in S$?

- Ако $x \in S$, то $x \notin S$ съгласно (1).
- Ако $x \notin S$, то $x \in S$ съгласно (1).

$2^{\mathbb{N}}$ не е изброимо (8)

Илюстрация на алтернативното доказателство



Разглеждаме всички етикети, които са записани в-у кути, които не ги съдържат. Те образуват S .
 S има етикет x . Дали $x \in S$?

Принцип на Dirichlet (the pigeonhole principle)

Известен още като принцип на чекмеджетата

Ако X и Y са крайни множества и $|X| > |Y|$, то не съществува инекция $f : X \rightarrow Y$.

Алтернативна формулировка: ако има m ябълки в n чекмеджета и $m > n$, то в поне едно чекмедже има повече от една ябълка.

Обобщен принцип на Dirichlet: ако има $kn + 1$ ябълки в n чекмеджета, то в поне едно чекмедже има повече от k ябълки.

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (1)

Теорема 4

Нека A е крайно множество и нека $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава R има поне един минимален и поне един максимален елемент.

БОО, ще докажем само факта, че съществува минимален елемент. Да допуснем противното. Тогава съществува крайно A и поне една частична наредба R над A , такава че R няма минимален елемент.

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (2)

Избираме произволен $a \in A$. По допускане, a не е минимален, така че съществува $b \in A$, такъв че $b \neq a$ и bRa .

По допускане, b не е минимален, така че съществува $c \in A$, такъв че $c \neq b$ и cRb .

И така нататък. Може да изградим колкото искаме дълга верига, завършваща на a :

$$p = z, \dots, c, b, a$$

Правим p с повече от $|A|$ елементи. Съгласно принципа на Dirichlet, p съдържа поне едно повтарящ се елемент x .

Наличие на минимален и максимален елемент в крайни частични наредби (3)

В общия случай, p изглежда така

$$p = z, \dots, x, \dots, x, \dots, c, b, a$$

Може x да е a , или b , или c , или z . Не правим никакви допускания за това. Важното е, че има повтарящ се елемент. Знаем, че двете появи на x не са съседни – дефиницията на “верига” не го позволява.

Забелязваме, че в R има контур:

$$p = z, \dots, \underbrace{x, \dots, x}_{\text{това е контур}}, \dots, c, b, a$$

Това противоречи на теоремата, според която в частичните наредби няма контури.

Теорема 5

Нека A е крайно множество, $|A| = n$ и $R \subseteq A^2$ е частична наредба. Тогава съществува поне едно линейно разширение R' на R .

Доказателството е конструктивно: с алгоритъм, известен като *Topological Sorting*. Няма да строим самото линейно разширение R' , а ще построим $B[1, \dots, n]$, в който ще разположим елементите на A . Разполагането на елементи на множество в масив задава еднозначно линейна наредба. Формално, B и R' са съвършено различни обекти; най-малкото, $|R'| = \frac{n(n+1)}{2}$. Но R' може да бъде конструирана лесно от B .

Топологическо сортиране (2)

Вход: крайно A , като $|A| = n$; частична наредба $R \subseteq A^2$

Изход: масив B , реализиращ линейно разширение R' на R

- 1 $i \leftarrow 1$
- 2 избираме произволен $a \in A$, който е минимален елемент на R
- 3 $B[i] \leftarrow a$, изтриваме a от A и от R , правим $i++$
- 4 ако $i = n + 1$, върни B , в противен случай иди на 2.

Алгоритъмът е коректен, тъй като в началото има поне един минимален елемент съгласно Теорема 4, а при всяка следващо достигане на ред 2 пак има поне един минимален елемент, тъй като изтриване на елемент от релацията не може да образува цикъл, ерго тя остава частична наредба след всяко изтриване на ред 3.

КРАЙ