ЗАБЕЛЕЖИТЕЛНА ЗАДАЧА ОТ VJIMC 2017, ИЛИ КАК СЕ ПРЕСМЯТАТ ПЕТОРНИ СУМИ

Международното студентско състезание по математика "Войтех Ярник" (съкр. VJIMC) се провежда в чешкия град Острава всяка година в края на март или в началото на април. За времето от първото си провеждане през 1991 г. състезанието е дало възможност за изява на множество талантливи математици. През четвъртвековната му история се е натрупал запас от красиви задачи, заслужаващи вниманието на ценителите на изкуството, наречено математика.

Организаторите на VJIMC 2017 имаха оригиналното хрумване да отпечатат върху тениски следната задача:

Да се пресметне петорната сума

$$\sum_{V=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{I=1}^{\infty}\sum_{M=0}^{V}\sum_{C=1}^{J}\frac{(-1)^M\,2^{4J+4M}\binom{V}{M}(J+M+1)!^{\,2}}{C\,I^2\left(I^4+4\right)^{J+M+1}(2J+2M+3)!}.$$

Със завръщането си състезателите на Софийския университет "Св. Климент Охридски" донесоха задачата във Факултета по математика и информатика. Тя бързо се разпространи сред преподавателите и студентите и в продължение на около месец устоя на всички опити да бъде решена. Накрая все пак задачата получи своето решение.[1]

Да означим търсената сума с S. Първата стъпка[2] е да усложним сумата още повече! Трите факториела могат да се заменят с интеграл чрез известната бета-функция на Ойлер. За да не предполагаме нищо странично, ще докажем нужната ни формула:

$$\int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\,,\quad \forall p\in\mathbb{N}_0\,,\quad \forall q\in\mathbb{N}_0\,.$$

Доказателство: Преработваме лявата страна, докато получим дясната:

$$\int_0^1 x^p\,(1-x)^q\,dx = \int_0^1 (1-x)^q\,d\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}\,(1-x)^q}{p+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1}\,d\Big((1-x)^q\Big) =$$

$$= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}\,(1-x)^{q-1}\,dx = \ldots = \frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)}\int_0^1 x^{p+2}\,(1-x)^{q-2}\,dx = \ldots = \ldots =$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}\int_0^1 x^{p+q}\,dx = \frac{q!}{(p+q)!\big/p!}\cdot\frac{x^{p+q+1}}{p+q+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{p!\,q!}{(p+q)!}\cdot\frac{1}{p+q+1}$$

$$= \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\,. \qquad \blacksquare$$

В доказаната формула заместваме $p = q = J+M+1$ и получаваме:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty}\sum_{J=1}^{\infty}\sum_{I=1}^{\infty}\sum_{M=0}^{V}\sum_{C=1}^{J}\int_0^1\frac{(-1)^M\,2^{4J+4M}\binom{V}{M}\left(x-x^2\right)^{J+M+1}}{C\,I^2\left(I^4+4\right)^{J+M+1}}\,dx.$$

[1] Текстът следва решението на студента Емилиян Рогачев, докладвано на 10 май 2017 г. на едно от занятията на избираемия курс по комбинаторика и теория на графите.

[2] Идеята за замяна на трите факториела с интеграл беше дадена от доц. Владимир Бабев.

Сменяме реда на сумиране и интегриране:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{V} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left(\frac{(-1)^{M}\, 16^{M} \binom{V}{M} \left(x - x^{2}\right)^{M+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{M+1}} \sum_{J=C}^{\infty} \left(\frac{16\left(x - x^{2}\right)}{I^{4}+4} \right)^{J} \right) dx.$$

Пресмятаме сумата в интеграла по формулата за безкрайна геометрична прогресия:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{V} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{(-1)^{M}\, 16^{M} \binom{V}{M} \left(x - x^{2}\right)^{M+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{M+1}} \cdot \frac{\left(\frac{16\left(x - x^{2}\right)}{I^{4}+4} \right)^{C}}{1 - \frac{16\left(x - x^{2}\right)}{I^{4}+4}} \, dx.$$

Опростяваме получения израз:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{M=0}^{V} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{(-1)^{M}\, 16^{M+C} \binom{V}{M} \left(x - x^{2}\right)^{M+C+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{M+C} \left(16\, x^{2} - 16\, x + I^{4} + 4\right)} \, dx.$$

Отново сменяме реда на сумиране и интегриране:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left(\frac{16^{C} \left(x - x^{2}\right)^{C+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{C} \left(16\, x^{2} - 16\, x + I^{4} + 4\right)} \sum_{M=0}^{V} \binom{V}{M} \left(\frac{16\, x^{2} - 16\, x}{I^{4}+4} \right)^{M} \right) dx.$$

Пресмятаме сумата в интеграла по биномната формула:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{16^{C} \left(x - x^{2}\right)^{C+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{C} \left(16\, x^{2} - 16\, x + I^{4} + 4\right)} \left(1 + \frac{16\, x^{2} - 16\, x}{I^{4}+4} \right)^{V} dx.$$

Опростяваме получения израз:

$$S = \sum_{V=1}^{\infty} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \frac{16^{C} \left(x - x^{2}\right)^{C+1} \left(16\, x^{2} - 16\, x + I^{4} + 4\right)^{V-1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{C+V}} \, dx.$$

За трети път сменяме реда на сумиране и интегриране:

$$S = \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_{0}^{1} \left(\frac{16^{C} \left(x - x^{2}\right)^{C+1}}{C\, I^{2} \left(I^{4}+4\right)^{C+1}} \sum_{V=1}^{\infty} \left(\frac{16\, x^{2} - 16\, x + I^{4} + 4}{I^{4}+4} \right)^{V-1} \right) dx.$$

Пресмятаме сумата в интеграла по формулата за безкрайна геометрична прогресия:

$$S = \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{16^C \left(x - x^2\right)^{C+1}}{C\, I^2 \left(I^4 + 4\right)^{C+1}} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{16\,x^2 - 16\,x + I^4 + 4}{I^4 + 4}}\ dx.$$

Опростяваме получения израз:

$$S = \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{16^{C-1} \left(x - x^2\right)^C}{C\, I^2 \left(I^4 + 4\right)^C}\ dx = \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \sum_{C=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{16\left(x - x^2\right)}{I^4 + 4}\right)^C \cdot \frac{1}{C\, I^2}\ dx.$$

Сумата по C вкарваме в интеграла:

$$S = \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1}{I^2} \sum_{C=1}^{\infty} \left(\frac{16\left(x - x^2\right)}{I^4 + 4}\right)^C \cdot \frac{1}{C}\right) dx.$$

От развитието на логаритъма в степенен ред:

$$-\ln(1 - t) = \sum_{C=1}^{\infty} \frac{t^C}{C}$$

намираме сумата в интеграла:

$$S = \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{-1}{I^2} \ln\left(1 - \frac{16\left(x - x^2\right)}{I^4 + 4}\right) dx = \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{-1}{I^2} \ln\left(\frac{16\,x^2 - 16\,x + I^4 + 4}{I^4 + 4}\right) dx$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \frac{1}{I^2} \left(\int_0^1 \ln\left(I^4 + 4\right)\ dx - \int_0^1 \ln\left(16\,x^2 - 16\,x + I^4 + 4\right)\ dx\right).$$

Първият интеграл е табличен:

$$\int_0^1 \ln\left(I^4 + 4\right)\ dx = \ln\left(I^4 + 4\right).$$

Вторият интеграл се решава чрез полагането $4x - 2 = y$ и интегриране по части:

$$\int_0^1 \ln\left(16\,x^2 - 16\,x + I^4 + 4\right)\ dx = \frac{1}{4} \int_{-2}^{+2} \ln\left(y^2 + I^4\right)\ dy =$$

$$= \frac{1}{4}\, y\, \ln\left(y^2 + I^4\right) \Bigg|_{y=-2}^{y=+2} - \frac{1}{4} \int_{-2}^{+2} y\ d\left[\ln\left(y^2 + I^4\right)\right] = \ln\left(I^4 + 4\right) - \frac{1}{2} \int_{-2}^{+2} \frac{y^2}{y^2 + I^4}\ dy.$$

Заместваме в последната формула за S:

$$S = \frac{1}{32} \sum_{I=1}^{\infty} \frac{1}{I^2} \left(\int_{-2}^{+2} \frac{y^2}{y^2 + I^4}\ dy\right).$$

Интегралът от рационална функция се пресмята по стандартния начин:

$$\int_{-2}^{+2} \frac{y^2}{y^2+I^4}\,dy \;=\; \int_{-2}^{+2} \left(1 \;-\; \frac{I^4}{y^2+I^4}\right)\,dy \;=\; \int_{-2}^{+2} dy \;-\; I^4 \int_{-2}^{+2} \frac{dy}{y^2+I^4} \;=$$

$$= \left(y \;-\; I^2 \operatorname{arctg} \frac{y}{I^2}\right)\Bigg|_{y=-2}^{y=+2} \;=\; 4 \;-\; 2I^2 \operatorname{arctg} \frac{2}{I^2}\cdot$$

Следователно

$$S \;=\; \frac{1}{32} \sum_{I=1}^{\infty} \frac{1}{I^2} \left(4 \;-\; 2I^2 \operatorname{arctg} \frac{2}{I^2}\right) \;=\; \frac{1}{8} \sum_{I=1}^{\infty} \frac{1}{I^2} \;-\; \frac{1}{16} \sum_{I=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{I^2}\cdot$$

Сумата в умаляемото е известен класически проблем, решен още от Ойлер чрез развиване на функцията $\sin x$ в безкрайно произведение и в безкраен степенен ред:

$$\sin x \;=\; x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \;-\; \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) \;=\; x \;-\; \frac{x^3}{3!} \;+\; \frac{x^5}{5!} \;-\; \frac{x^7}{7!} \;+\; \ldots$$

Като бъдат сравнени коефициентите пред x^3, се стига до извода, че

$$\sum_{I=1}^{\infty} \frac{1}{I^2} \;=\; \frac{\pi^2}{6}\cdot$$

До същия извод можем да дойдем, ако развием функцията x^2 в тригонометричен ред:

$$x^2 \;=\; \frac{\pi^2}{3} \;+\; 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

и заместим $x = \pi$.

Остава да пресметнем сумата в умалителя. Преобразуваме събираемите ѝ:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{I^2} \;=\; \operatorname{arctg} \frac{(I+1)-(I-1)}{1+(I+1)(I-1)} \;=\; \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}(I+1)\Big) - \operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}(I-1)\Big)}{1+\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}(I+1)\Big)\;\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}(I-1)\Big)} \;=$$

$$=\; \operatorname{arctg}\Big[\operatorname{tg}\Big(\operatorname{arctg}(I+1) \;-\; \operatorname{arctg}(I-1)\Big)\Big] \;=\; \operatorname{arctg}(I+1) \;-\; \operatorname{arctg}(I-1).$$

При сумирането на тези изрази е удобно да групираме отделно четните и нечетните I:

$$\sum_{I=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{I^2} \;=\; \sum_{I=1}^{\infty} \Big(-\; \operatorname{arctg}(I-1) \;+\; \operatorname{arctg}(I+1)\Big) \;=$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(-\;\operatorname{arctg} 0 + \cancel{\operatorname{arctg} 2} - \cancel{\operatorname{arctg} 2} + \cancel{\operatorname{arctg} 4} - \ldots + \ldots - \cancel{\operatorname{arctg}(2n-2)} + \operatorname{arctg} 2n\Big) \;+$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(-\;\operatorname{arctg} 1 + \cancel{\operatorname{arctg} 3} - \cancel{\operatorname{arctg} 3} + \cancel{\operatorname{arctg} 5} - \ldots + \ldots - \cancel{\operatorname{arctg}(2n-1)} + \operatorname{arctg}(2n+1)\Big) \;=$$

$$-\;\operatorname{arctg} 0 \;-\; \operatorname{arctg} 1 \;+\; 2 \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \;=\; -\,0 \;-\; \frac{\pi}{4} \;+\; 2\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{3\pi}{4}\cdot$$

Окончателно,

$$S \;=\; \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi^2}{6} \;-\; \frac{1}{16}\cdot\frac{3\pi}{4} \;=\; \frac{\pi^2}{48} \;-\; \frac{3\pi}{64} \;=\; \frac{4\pi^2-9\pi}{192} \;\approx\; 0,05835.$$

Това е отговорът на задачата — стойността на петорната сума.