ИЗБРАНИ ГЛАВИ ОТ КОМБИНАТОРИКАТА И ТЕОРИЯТА НА ГРАФИТЕ
(ИЗПИТ — СУ, ФМИ, ЛЕТЕН СЕМЕСТЪР НА 2017 / 2018 УЧ. Г.)

Задача 1. Намерете формула за общия член на редицата
$a_0 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \cdots + na_0$ за всяко цяло $n \geq 1$.

Задача 2. Намерете формула за общия член на редицата
$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = -2n\,a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\, a_{n-k} \text{ за всяко цяло } n \geq 2.$$

Задача 3. Докажете, че $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \pmod p$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и всяко просто p.

Задача 4. Имаме правоъгълна таблица с два реда и n стълба. По колко начина можем да я попълним без повторения с числата $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 2n$ така, че във всеки ред числата да растат отляво надясно, а във всеки стълб да растат отгоре надолу?

Упътване: Сведете задачата до брой на пътищата в целочислена решетка.

Задача 5. Колко са пермутациите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на числата $1, 2, 3, \ldots, n$, в които точно k елемента са по-големи от поредния си номер? Тоест търси се броят на пермутациите, удовлетворяващи изискването: $\left| \left\{ i : a_i > i \right\} \right| = k$.

Упътване: Да означим търсения брой пермутации с $f(n\,; k)$, където $0 \leq k < n$, n и k са цели числа. На всяка пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, n$ може да се съпостави пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, n-1$ по следния начин: разместваме n и последния елемент на пермутацията, след което задраскваме n. Например от пермутацията $4, 1, 5, 2, 3$ получаваме пермутацията $4, 1, 3, 2$. Ако n е последен елемент, направо го задраскваме. Например от $4, 1, 3, 2, 5$ получаваме пак пермутацията $4, 1, 3, 2$.

Така може да се състави рекурентно уравнение за функцията $f(n\,; k)$, което (заедно с подходящо начално условие) дава отговора на задачата.

Задача 6. Тесте от 52 карти е наредено в правоъгълник с 4 реда и 13 стълба. Докажете, че можем да изберем 13 карти, които да са от различни стълбове и с различни стойности (асо, двойка, тройка, ... , десетка, вале, дама, поп).

Упътване: Моделирайте задачата с граф.

РЕШЕНИЯ

Задача 1 може да се реши с помощта на пораждащи функции. Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n.$$

Тогава

$$f(x)\, g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \cdots + n a_0 \right) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - a_0.$$

Тоест

$$f(x)\, g(x) = f(x) - 1,$$

откъдето намираме

$$f(x) = \frac{1}{1 - g(x)}.$$

Функцията $g(x)$ се намира от своето определение:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = x \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Заместваме:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{x}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 - 3x + 1}.$$

Знаменателят има две нули — числата $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, поради което знаменателят се разлага на множители така: $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right)$. Затуй търсим разлагане на правилната дроб в сбор от елементарни дроби от вида:

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 1} = \frac{A}{x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{B}{x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

Като приведем дробите в дясната страна под общ знаменател, получаваме

$$\frac{1x + 0}{x^2 - 3x + 1} = \frac{(A+B)x - \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} A + \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} B \right)}{x^2 - 3x + 1}.$$

Това равенство е тъждество относно x, затова коефициентите пред съответните степени на x трябва да бъдат равни:

$$\left|\begin{array}{l} A+B=1 \\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}A+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}B=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} A+B=1 \\ \left(3-\sqrt{5}\right)A+\left(3+\sqrt{5}\right)B=0. \end{array}\right.$$

Тази система има единствено решение:

$$A=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}, \quad B=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}.$$

Следователно

$$f(x)=1+\frac{x}{x^2-3x+1}=1+\frac{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}}{x-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{\dfrac{5-3\sqrt{5}}{10}}{x-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}},$$

$$f(x)=1-\frac{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}}{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}-x}+\frac{\dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}}{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}-x},$$

$$f(x)=1-\frac{\dfrac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}{1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{\dfrac{3\sqrt{5}-5}{10}\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}{1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x},$$

$$f(x)=1-\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}x},$$

$$f(x)=1-\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n,$$

откъдето намираме:

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \text{ при всяко цяло } n>0.$$

Тази формула не важи при $n=0$, тъй като $a_0=1$.

Задача 1 може да се реши и по друг начин — без пораждащи функции. В рекурентното уравнение

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \cdots + n a_0$$

заместваме n с $n+1$:

$$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4a_{n-3} + \cdots + (n+1)\, a_0 .$$

От второто уравнение изваждаме първото:

$$a_{n+1} - a_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_0 ,$$

тоест

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_0 .$$

Още веднъж заместваме n с $n+1$:

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \cdots + a_0 .$$

От новото уравнение изваждаме старото:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2a_{n+1} - a_n ,$$

тоест

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0 \quad \text{за всяко цяло } n \geq 1.$$

Получи се линейно-рекурентно уравнение, което може да се реши с помощта на характеристично уравнение. При съставянето на система линейни уравнения за търсене на неопределените коефициенти трябва да се използват a_1 и a_2, но не и a_0, защото линейно-рекурентното уравнение не важи за $n = 0$.

Задача 1 може да се реши и по трети начин. Пресмятаме първите няколко члена на редицата:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 8, \quad a_4 = 21, \quad a_5 = 55, \quad a_6 = 144 \quad \text{и т.н.}$$

Забелязваме, че това е редицата от числата на Фибоначи, взети през едно. Това предположение може да се докаже например с математическа индукция.

Задача 2 се решава с помощта на експоненциални пораждащи функции. Нека

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n!} \cdot$$

Тогава

$$f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k a_{n-k}}{k!(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} \cdot$$

От $a_0 = 0$ следва, че първите две събираеми са нули, затова

$$f^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \Big(a_n + 2n a_{n-1} \Big) \frac{x^n}{n!} \cdot$$

Следователно

$$f^2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} + 2x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Прибавяме и изваждаме липсващите събираеми:

$$f^2(x) = -(1+2x)a_0 \frac{x^0}{0!} - a_1 \frac{x^1}{1!} + (1+2x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Заместваме $a_0 = 0, \quad a_1 = 1$:

$$f^2(x) = -x + (1+2x) f(x),$$

тоест

$$f^2(x) - (1+2x) f(x) + x = 0.$$

От това квадратно уравнение намираме

$$f(x) = \frac{2x+1 \pm \sqrt{4x^2+1}}{2}.$$

Щом функцията се разлага в степенен ред, то тя е непрекъсната. Понеже този корен не приема стойност нула за никое реално x, то знакът пред корена е един и същ за всички реални x. От $a_0 = 0$ следва, че $f(0) = 0$, поради което знакът пред корена е минус:

$$f(x) = \frac{2x+1-\sqrt{4x^2+1}}{2} = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\sqrt{4x^2+1} = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}(4x^2+1)^{1/2}.$$

Развиваме този израз по биномната формула на Нютон:

$$f(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} 4^n x^{2n}.$$

Отделяме първото събираемо от сумата:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} 4^n x^{2n}.$$

В съгласие с началните условия получихме формулите $a_0 = 0$ и $a_1 = 1$. Членовете на редицата с нечетни индекси, по-големи от 1, са нули, тоест

$$0 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = \ldots$$

Членовете на редицата с четни индекси, по-големи от 0, са ненулеви. По-точно,

$$\frac{a_{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{n} 4^n = -\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}\cdot\frac{-5}{2}\cdots\frac{3-2n}{2}}{n!} 2^{2n-1} = \frac{(2n-3)!!}{n!}(-1)^n 2^{n-1}.$$

Преработваме получения израз:

$$a_{2n} = (2n)!\,\frac{(2n-2)!!(2n-3)!!}{(2n-2)!!\,n!}(-1)^n 2^{n-1} = \frac{(2n-2)!(2n)!}{(n-1)!\,n!}(-1)^n \quad \text{за целите } n \geq 1.$$

Задача 3. Прилагаме теоремата на Люка. Нека $n = \overline{a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \dots a_2\, a_1\, a_0}$ е записът на n в бройната система с основа p. Понеже $p = 000\dots010_{(p)}$, то

$$\binom{n}{p} \equiv \binom{a_k}{0}\binom{a_{k-1}}{0}\binom{a_{k-2}}{0}\cdots\binom{a_2}{0}\binom{a_1}{1}\binom{a_0}{0} = 1.1.1\dots1.a_1.1 = a_1 \pmod{p}.$$

От друга страна,

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_k p^k + \cdots + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}{p} \right\rfloor = \left\lfloor a_k p^{k-1} + \cdots + a_2 p + a_1 + \frac{a_0}{p} \right\rfloor =$$

$$= a_k p^{k-1} + \cdots + a_2 p + a_1 \equiv a_1 \pmod{p}.$$

Щом $\binom{n}{p} \equiv a_1 \pmod{p}$ и $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \equiv a_1 \pmod{p}$, то $\binom{n}{p} \equiv \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \pmod{p}$.

Задача 4. Да вземем произволна правилно попълнена таблица и да започнем да защриховаме клетките във възходящ ред на числата: $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 2n$. Във всеки миг всяко защриховано число е по-малко от всяко незащриховано. Понеже числата растат отляво надясно и отгоре надолу, то във всеки ред защрихованите клетки се намират плътно вляво, а във всеки стълб — горе. Ако x и y са съответно броят на защрихованите клетки в първия и втория ред, то x и y са цели неотрицателни числа и $y \leq x$. При всяко защриховане на клетка едно от числата x и y се увеличава с единица, тоест точката $(x\,;\,y)$ се разхожда по възлите на целочислената решетка, като на всеки ход се мести с една стъпка нагоре или надясно. Движението започва от позицията $(0\,;\,0)$, защото отначало няма защриховани клетки, и свършва в позицията $(n\,;\,n)$, защото накрая всички клетки са защриховани.

Обратно, на всяка разходка от този вид съответства правилно попълнена таблица. Започваме с празна таблица, в която последователно пишем числата $1, 2, 3, 4, 5, \dots, 2n$ в нарастващ ред. Всяко число записваме в най-лявата свободна клетка на един от двата реда:
— на първия ред — ако поредната стъпка от разходката е надясно;
— на втория ред — ако поредната стъпка от разходката е нагоре.

Поради неравенството $y \leq x$ във всеки миг в първия ред ще бъдат попълнени не по-малко клетки, отколкото във втория. Затова по-големите числа ще бъдат записвани надолу и надясно, тоест таблицата ще бъде попълнена правилно.

Построената биекция показва, че броят на правилно попълнените таблици е равен на броя на разходките от описания вид. Този брой е числото на Каталан $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Задача 5. Да означим търсения брой пермутации с $f(n;k)$. Тази функция е дефинирана за цели числа n и k, за които $0 \le k < n$.

При $n = 1$ има само една пермутация: (1). Никой от нейните елементи не е по-голям от номера си, затова $f(1;0) = 1$.

Нека $n > 1$. Тогава на всяка една пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, n$ съпоставяме пермутация на числата $1, 2, 3, \ldots, n-1$ по следния начин: разместваме n и последния елемент на пермутацията, след което задраскваме n. Например от пермутацията 4, 1, 5, 2, 3 получаваме пермутацията 4, 1, 3, 2. Ако n е последен елемент, направо го задраскваме. Например от 4, 1, 3, 2, 5 получаваме пак пермутацията 4, 1, 3, 2. От показаните примери става ясно, че това съответствие не е биекция: една пермутация на $1, 2, 3, \ldots, n-1$ може да има няколко първообраза. Всеки от тях се получава така: дописваме n в десния край, след което евентуално разместваме n с някой друг елемент.

Ако пермутацията на числата $1, 2, 3, \ldots, n$ съдържа точно k елемента, по-големи от номерата си, то в съответната пермутация на $1, 2, 3, \ldots, n-1$ ще има точно k или $k-1$ такива елемента. Обратно, нека в пермутацията на числата $1, 2, 3, \ldots, n-1$ има точно k елемента, по-големи от номерата си. Първообразите, в които също има точно k елемента, по-големи от номерата си, се получават, като допишем n отдясно и го оставим там или го разместим с някой от въпросните k елемента. Следователно за n има $k + 1$ възможни места, т.е. има $(k+1)f(n-1;k)$ пермутации на $1, 2, 3, \ldots, n$ с желаното свойство.

Ако пермутацията на $1, 2, 3, \ldots, n-1$ съдържа точно $k-1$ елемента, по-големи от номерата си, то първообразите с точно k такива елемента се получават, като допишем n отдясно и го разместим с някой от останалите $n-k$ елемента. Следователно за числото n има $n-k$ възможни места, т.е. има още $(n-k)f(n-1;k-1)$ пермутации на $1, 2, 3, \ldots, n$ с желаното свойство.

От тези разсъждения получаваме рекурентното уравнение

$$f(n;k) = (k+1)f(n-1;k) + (n-k)f(n-1;k-1) \quad \text{за } n > 1.$$

Това уравнение заедно с условието $f(1;0) = 1$ определя еднозначно $f(n;k)$: $f(n;k) = \left\langle {n \atop k} \right\rangle$ е число на Ойлер от първи род.

Задача 6. Разглеждаме двуделен граф с 26 върха: 13-те върха от първия дял са стълбовете на правоъгълника, а 13-те върха от втория дял са стойностите на картите (асо, двойка, тройка, ... , десетка, вале, дама, поп). Има ребро между стълба u и стойността v $\Leftrightarrow$ стълбът u съдържа карта със стойност v. Всеки k стълба съдържат общо $4k$ карти; а от произволни $k - 1$ стойности има само $4(k-1)$ карти, което е по-малко от $4k$. Затова всеки k стълба съдържат карти с общо поне k различни стойности. От теоремата на Хол следва, че графът притежава съвършено съчетание, тоест 13 ребра без общи краища. На тях съответстват 13 карти с различни стойности от различни стълбове.