ДАА

упр.№13, 18 юни 2020г.

Hello, world!

Зад.11. Даден е неориентиран тегловен свързан граф G(V,E) с неотрицателни тегла на ребрата. След премахване на 1 или повече ребра е получен G'(V,E'), също свързан.
Да се докаже, че:
- w(MST(G)) <= w(MST(G'))
- за всеки u,v от V: w(path(G,u,v)) <= w(path(G',u,v))

Нека MST(G') е по-леко от MST(G). Разгл. като множ. от ребра, MST(G') е покр. дърво за G $\Rightarrow$ това е ПД за G с тегло < MST(G).

Зад.12. Даден е неориентиран тегловен свързан граф $G(V,E)$. След увеличаване на теглата на всяко ребро с неотрицателна константа е получен графът $G'(V,E')$.

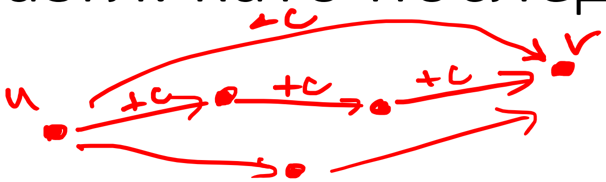
$w: E \to \mathbb{R}^+$ $\quad c$

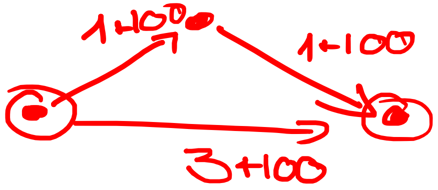
Да се докаже или опровергае, че:

- MST остава същото (разгл. като множество от ребра) → вярно
- най-леките пътища между всеки два върха остават същите (разгл. като последователност от върхове) → грешно

$w': E \to \mathbb{R}^+$

$w'(e) = w(e) + c$ за $\forall e \in E$





$(n-1)c$

Ако $w(T) < w(T_1)$, то и след промяната $w(T) + (n-1).c < w(T_1) + (n-1)c$

Когато увеличим теглата на ребрата с C,
то наредбата м/у ребрата остава същата
⇒ алг. на Крускал ще генерира същото МПД
(защото той се интересува само от тяхната наредба,
а не конкретните им тегла)

Зад.3. В галерия са подредени в редица n картини на стойност c1,c2,...,cn. Можем да откраднем колкото картини искаме, стига да не взимаме някоя двойка съседни. Каква най-голяма печалба можем да получим?

– търсим подмножество => те са 2^n на брой => скъпо е да пробваме всички

1. $M[1..n]$ – за $M[i]$ = макс. печалба, взимайки измежду първите i картини

2. $M[1] = C[1]$; $M[2] = \max\{C[2], M[1]\}$

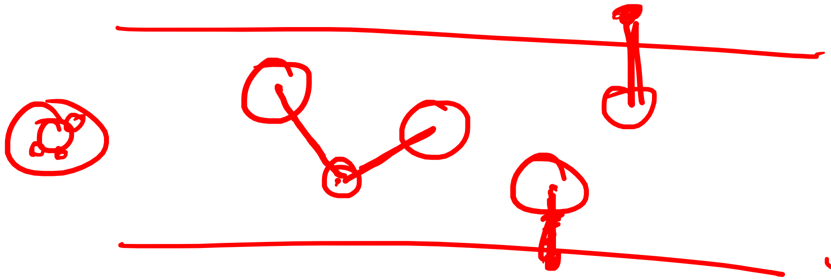
$$f(i) = \max\begin{cases} C[i] + f(i-2) \\ f(i-1) \end{cases}$$

3. for $i \leftarrow 2$ to n

4. $M[i] = \max\{\underbrace{C[i] + M[i-2]}_{C[i]}; M[i-1]\}$

5. return $M[n]$

Задачата за хамстера



Ще сост. граф с $n+2$ върха; съотв. на n-те препятствия и двете стени. Между 2 върха ще има ребро т.с.т.к. хамстерът не може да мине м/у съотв. на тези върхове препятствия и/или стени

$m = O(n^2)$

$m \le \frac{(n+2)(n+1)}{2} \Rightarrow O(n^2)$

Тогава хамстерът може да мине т.с.т.к. няма път в графа, между върховете, съотв. на двете стени. $\Omega(n)$

$T(n) = \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{постр.}} + \underbrace{O(n+m)}_{DFS} = \Theta(n^2)$; $M(n) = \underbrace{O(n^2)}_{\text{графа}} + \underbrace{\Theta(m)}_{DFS} = O(n^2)$ (но $\Omega(n)$)

Longest Increasing Subsequence $\neq$ Subarray

Зад.4. Да се намери най-голямата нарастваща подредица в масив от числа.

15 1 2 -3 4 10 8 6 2

1

- свежда се като LPDAG

Нека постр. граф, в който на $\forall$ число съотв. връх и има ребро от i към j т.с.т.к. $A[i] < A[j]$ и $i < j$

$\Rightarrow$ върховете са топологично сортирани (важно - не искаме размествания)

$\Rightarrow$ най-дългият път ще съотв. на най-дългата подредица

$$T(n) = \underbrace{\Theta(n^2)}_{\text{постр.}} + \Theta(n+m) = \Theta(n^2)$$

$$M(n) = \underbrace{O(n^2)}_{\text{графа}} + \Theta(n) = O(n^2) \ (\text{но } \Omega(n))$$

1. $M[1..n]$: $M[i]$ ще е дължината на макс. дълж. на подредица, започваща с $M[i]$

2. for $i \leftarrow n$ downto 1

3. $M[i] = 1$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \Theta(n^2)$$

4. for $j \leftarrow i+1$ to n

5. if $M[j] > M[i]$

6. $M[i] = \max\{M[i]; 1 + M[j]\}$

7. return Maximum$(M[1..n])$

$$T(n) = \Theta(n^2) + \underbrace{\Theta(n)}_{\text{Maximum}} = \Theta(n^2)$$

$$M(n) = \Theta(n)$$

Общо подредиците са $\Theta(2^n)$

$\mathbb{N}^+$

Зад.5. Да се намери минималният брой квадрати на естествени числа (може да се повтарят), които дават сума N. → за всички

Пример: $N = 12 = \cancel{9}\, 3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$

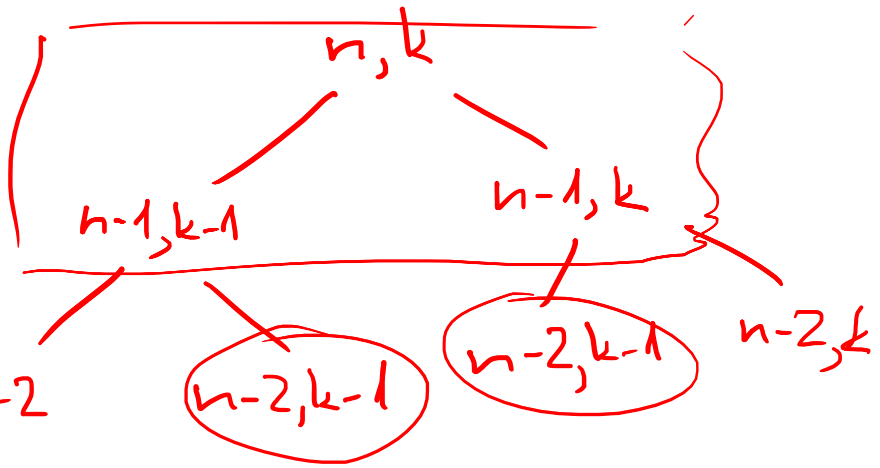
$= 2^2 + 2^2 + 2^2$

Зад.6. Да се изчисли биномния коефициент n над k.

$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$

$f(n,n) = 1$ за $\forall n$

$f(n,0) = 1$ за $\forall n$



$M[0..n][0..k]$ — инв!

$M[i][j] = \binom{i}{j}$

$= 0$, ако $i<j$

for $i \leftarrow 0$ to n

  $M[i][0] = 1$

for $i \leftarrow 1$ to n

  for $j \leftarrow 0$ to n

   $M[i][j] = (i<j\ ?\ 0 : (i=j\ ?\ 1 : M[i-1][j-1] + M[i-1][j]))$

$T(n,k) = \Theta(nk)$

$M(n,k) = \Theta(nk)$

→ може да се опт. до $M(n,k) = \Theta(\min\{n,k\})$

Зад.7. Робот се намира в горния ляв край на матрица NxM и може да се движи само надолу и надясно. Каква е максималната сума от числа, която може да се събере по някой маршрут до долния десен ъгъл на матрицата?

$f(x,y) =$ сумата, която ще съберем от (x,y)

$$= A[x][y] + \max\begin{cases} f(x+1,y) \\ f(x,y+1) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{1} \arrow[r] \arrow[d] & 7 \arrow[r] \arrow[d] & 12 \arrow[d] \\
3 \arrow[r] \arrow[d] & 11 \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[d] \\
12 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 10
\end{tikzcd}$$

~~Опт. решение е 54~~

1. $M[1..N][1..M]$: инв: $M[x][y] = f(x,y)$
2. $M[N][M] = A[N][M]$
3. for $i \leftarrow N-1$ to 1
4. $M[i][M] = A[i][M] + M[i+1][M]$
5. for $j \leftarrow M-1$ to
6. $M[N][j] = A[N][j] + M[N][j+1]$

7. for $i \leftarrow N-1$ to 1

8. for $j \leftarrow M-1$ to 1

9. $$M[i][j] = A[i][j] + \max\begin{cases} M[i+1][j] \\ M[i][j+1] \end{cases}$$

10. return $M[1][1]$

$$T(N,M) = \Theta(NM)$$
$$M(N,M) = \Theta(NM) \rightarrow \text{може да е } \Theta(\min\{N;M\})$$

Зад.8. Два робота тръгват едновременно от горния ляв ъгъл на матрица NxM, движейки се само надолу и надясно. Каква е максималната сума, която могат общо да съберат, стигайки независимо до долния десен ъгъл? Ако и двата минат през една и съща позиция, числото ще се прибави само веднъж към сумата. → за вкъщи

hint: опт. решение за примера от предишната задача е 54