ДАА

упр.№14, 25 юни 2020г.

Hello, world!

Зад.5. Да се намери минималният брой квадрати на естествени числа (може да се повтарят), които дават сума N.

$12 = 9+1+1+1 = 4+4+4$

$$f(x) = \min \begin{cases} 1 + f(x-1^2) \\ 1 + f(x-2^2) \\ 1 + f(x-3^2) \\ \ldots \end{cases}$$

1. $M[0..N]$: за $\forall i$ $M[i]$ = мин. бр. квадрати за сума i
2. $M[0] = 0$
3. for $x \leftarrow 1$ to N
4. $\quad M[x] = \infty$
5. $\quad$ for $i \leftarrow 1$ to $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$
6. $\quad\quad M[x] = \min\{M[x]; M[x-i^2]+1\}$
7. return $M[N]$

for (int i=1; i*i <= x; ++i)

Зад.8. Два робота тръгват едновременно от горния ляв ъгъл на матрица NxM, движейки се само надолу и надясно. Каква е максималната сума, която могат общо да съберат, стигайки независимо до долния десен ъгъл? Ако и двата минат през една и съща позиция, числото ще се прибави само веднъж към сумата.

1	7	12
3	11	5
12	8	10

$$f(x,y) = A[x][y] + \max\{f[x+1][y];\ f[x][y+1]\}$$

Ще мемоизираме макс. сума за всяка комбинация от начални позиции

$$f(x_1,y_1,x_2,y_2) = \begin{pmatrix} \text{if } x_1=x_2 \,\&\, y_1=y_2 \\ \text{then } A[x_1][y_1] \\ \text{else } A[x_1][y_1] + A[x_2][y_2] \end{pmatrix} + \max\begin{cases} f(x_1+1,y_1,x_2+1,y_2) \\ f(x_1,y_1+1,x_2,y_2+1) \\ f(x_1+1,y_1,x_2,y_2+1) \\ f(x_1,y_1+1,x_2+1,y_2) \end{cases}$$

$M[1..N][1..M][1..N][1..M]$

$\Rightarrow T(N,M) = M(N,M) = O(N^2M^2)$

$x_1+y_1=x_2+y_2 \Rightarrow y_2$ се опр. от x_1, y_1 и x_2

$$f(x_1,y_1,x_2) = \text{let } y_2 = x_1+y_1-x_2 \text{ in } \left(\begin{array}{l} \text{if } x_1=x_2 \\ \text{then } A[x_1][y_1] \\ \text{else } A[x_1][y_1] \\ \quad + A[x_2][y_2] \end{array} \right) + \max \begin{cases} f(x_1+1, y_1, x_2+1) \\ f(x_1, y_1+1, x_2) \\ f(x_1+1, y_1, x_2) \\ f(x_1, y_1+1, x_2+1) \end{cases}$$

$$M(N,M) = T(N,M) = \Theta(N^2M) \text{ или } \Theta(NM^2)$$

$\Rightarrow$ паметта може да се оптимизира до $\Theta(N^2)$ или $\Theta(M^2)$

Зад.9. Да се намери броят n-цифрени числа със сума на цифрите S → за по-лесно, нека не ни интерес. водещи нули

$$f(x, P) = f(x-1, P) + f(x-1, P-1) + f(x-1, P-2) + \dots + f(x-1, P-9)$$

(x – бр. цифри, P – сума)

	0	1	2	3	4	...	9	10		...
0	1	0	0	0	0	...				
1	1	1	1	1	1	...	1	0	0	...
2	1	2								
3	1	3								
4	1	4								
5	1	5								
⋮										
n	1	n								

⇒ в $M[n][S]$ са всички със сума S и ≤ n реални цифри

в $M[n][S] - M[n-1][S]$ са точно-n-цифрените

1. $M[1..n][0..S]$
2. for i ← 0 to 9
   - $M[1][i] = 1$

   for i ← 10 to S
   - $M[1][i] = 0$

   for i ← 1 to n
   - $M[i][0] = 1$

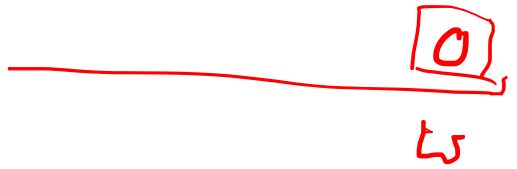
   for x ← 2 to n
   - for P ← 1 to S
     - $M[x][P] = 0$
     - for d ← 0 to min(P, 9)
       - $M[x][P] \mathrel{+}= M[x-1][P-d]$

$T(n,S) = M(n,S) = \Theta(nS)$

→ може да се опт. до $M(n,S) \times n$

Зад.10. Задачата за раницата: имаме n **вида обекти**, всеки вид със свое тегло и стойност. Да се намери каква е максималната сумарна стойност на **мултимнож**. от обекти, ненадвишаващи по общо тегло дадено ограничение W.

$$f(W) = \max \begin{cases} c[0] + f(W - w[0]) \\ c[1] + f(W - w[1]) \\ \vdots \\ c[n-1] + f(W - w[n-1]) \end{cases}$$



1. $M[0..W]$: $M[i]$ ще макс. ст. за обекти с тегло i $= f(i)$
2. $M[0] = 0$
3. for $x \leftarrow 1$ to W

   $M[x] = 0$

4. for $i \leftarrow 1$ to n
5. 6. if $w[i] \le x$
7. $M[x] = \max\{M[x]; c[i] + M[x - w[i]]\}$
8. return $\mathrm{Maximum}(M[0..W])$

Зад.11. Задачата за раницата, без повторения: имаме n **обекта**, всеки със свое тегло и стойност. Да се намери каква е максималната сумарна стойност на **подмнож**. от обекти, ненадвишаващи по общо тегло дадено ограничение W.

$f(k, \underset{\text{тегло}}{P})$ = макс. стойност на подмн. на първите k обекта, с тегло общо P

$$= \max \begin{cases} f(k-1, P) \\ c[k] + f(k-1, P-w[k]) \end{cases}$$

$\Rightarrow M[0..n][0..W]$

$\rightarrow$ Отговорът е $\mathrm{Maximum}(M[n][0..S])$

* неформално; може да е мулти-

Зад.12. **Partition**: да се намери възможно ли е множество* от числа да се разбие на две подмножества* с равна обща сума

Зад.13. Integer partition: по колко начина може число N да се разбие на сума от по-малки числа?
Напр.: за N=4 има 5 начина: 4, 3+1, 2+2, 2+1+1 и 1+1+1+1 - забележете, че не разпознаваме 1+3 или 1+2+1.

Ами ако искаме да ги разпознаваме?