

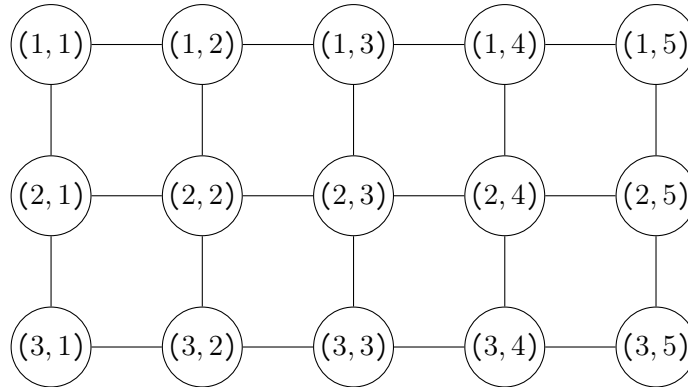
Име: Ф№: Група:

Задача. Нека $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, за всяко $n \in \mathbb{N}^+$. За всеки $p, q \in \mathbb{N}^+$, дефинираме граф

$$G_{p \times q} = (I_p \times I_q, \{(i, j), (k, \ell)\} \subseteq I_p \times I_q : |i - k| + |j - \ell| = 1\})$$

Неформално казано, върховете са наредените двойки на $I_p \times I_q$, като между две наредени двойки има ребро тогава и само тогава, когато те се различават само в едната позиция, и то само на единица.

Като пример, ето $G_{3 \times 5}$:



Докажете, че ако p и q са нечетни, то $G_{p \times q}$ не е Хамилтонов.

Упътване: Какви графи са графите $G_{p \times q}$? С други думи, класифицирайте графите $G_{p \times q}$ в някой вид графи, който сме изучавали на лекции и който е полезен за тази задача. Допуснете, че поне един $G_{p \times q}$, за нечетни p и q , е Хамилтонов и покажете как следва противоречие.

Въпрос. Какво означава изброимо множество? Докажете накратко, че множеството $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е изброимо.