Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите
(изпит — СУ, ФМИ, 13 юли 2020 г.)

Задача 1. Нека a, b и p са цели неотрицателни числа, като p е просто число. Докажете, че

$$\binom{ap}{bp} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}.$$

Задача 2. Пресметнете в явен вид обикновената и експоненциалната пораждаща функция на броя на подмножествата на n-елементно множество, $n \geq 0$.

Задача 3. Играч хвърля монета многократно. Всяко ези се брои за 1 точка; тура — за 2 точки. Каква е вероятността да съществува момент, в който играчът има точно n точки?

Задача 4. Да се намери броят на целочислените решения $(x_1\,,\,x_2\,,\,\ldots\,,\,x_n)$ на системата

$$\left|\begin{array}{l} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots \quad , \quad x_n \geq 0; \\ x_1 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 2, \quad \ldots \quad , \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leq n-1; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n. \end{array}\right.$$

Задача 5. Пребройте съвършените съчетания в пълния неориентиран граф (без примки) с n номерирани върха.

Задача 6. Нека n е произволно естествено число. Разглеждаме разбивания на n от два вида:
— разбивания, несъдържащи събираеми, кратни на 4;
— разбивания, несъдържащи повторени четни числа.
Докажете, че има равен брой разбивания от двата вида.

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Нека $a = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n}_{\,(p)}$ и $b = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n}_{\,(p)}$ са записите на a и b в позиционната бройна система с основа p. Тогава $ap = \overline{a_1 a_2 \ldots a_n 0}_{\,(p)}$ и $bp = \overline{b_1 b_2 \ldots b_n 0}_{\,(p)}$. Ако трябва, допълваме числата с нули отляво. Тъй като числото p е просто, имаме право да приложим теоремата на Люка:

$$\binom{a}{b} \equiv \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2} \cdots \binom{a_n}{b_n} \pmod{p};$$

$$\binom{ap}{bp} \equiv \binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2} \cdots \binom{a_n}{b_n}\binom{0}{0} \pmod{p}.$$

Понеже $\binom{0}{0} = 1$, то десните страни на двете сравнения са равни. Следователно левите им страни са сравними по модул p, което трябваше да се докаже.

Задача 2. ЕПФ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$. ОПФ: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \frac{1}{1-2x}\cdot$

Задача 3 е от Италианското национално състезание по математика през 1989 г. Тя се решава с помощта на рекурентно уравнение. Нека p_n е търсената вероятност, тоест относителният дял на игрите, в които играчът успява да събере точно n точки, спрямо множеството на всички игри. При $n > 0$ има две възможности:

— Играчът успява да събере точно $n-1$ точки в някой момент от протичането на играта. Относителният дял на тези игри е p_{n-1} и в половината от тях играчът събира точно n точки, като хвърли ези в момента, в който е събрал точно $n-1$ точки.

— Играчът никога няма точно $n-1$ точки. Относителният дял на тези игри е $1-p_{n-1}$ и във всички тях играчът успява да събере точно n точки: щом е прескочил бройката $n-1$, значи в някой момент е имал $n-2$ точки и тогава е хвърлил тура.

Като съберем относителните дялове от двата случая, получаваме рекурентното уравнение

$$p_n \,=\, \frac{1}{2}\,p_{n-1} \,+\, (1-p_{n-1})\,, \ \text{ тоест } \ p_n \,=\, 1 \,-\, \frac{1}{2}\,p_{n-1}\,.$$

Началното условие е $p_0 = 1$, защото играчът със сигурност има 0 точки в началото на играта. С помощта на характеристично уравнение намираме търсената вероятност:

$$p_n \,=\, \frac{2}{3} \,+\, \frac{1}{3}\left(-\,\frac{1}{2}\right)^n.$$

Задача 4. С помощта на начупена линия свързваме последователно точките $(0\,;\,0)$, $(1\,;\,0)$, $(1\,;\,x_1)$, $(2\,;\,x_1)$, $(2\,;\,x_1+x_2)$, $(3\,;\,x_1+x_2)$, $(3\,;\,x_1+x_2+x_3)$, $\ldots$, $(n\,;\,x_1+x_2+x_3+\,\ldots\,+x_{n-1})$, $(n\,;\,x_1+x_2+x_3+\,\ldots\,+x_{n-1}+x_n)$. Последната от тях всъщност е точката $(n\,;\,n)$. Тази линия има за върхове само целочислени точки. Ако я обходим от точката $(0\,;0)$ до точката $(n\,;n)$, на всеки ход ще се движим само нагоре или само надясно и във всеки миг ординатата ще бъде не по-голяма от абсцисата. Обратно, на всяка такава начупена линия съответства едно решение на системата, образувано от разликите на ординатите на точките с четни индекси. Ето защо на различни начупени линии съответстват различни решения на системата, тоест има биекция между решенията на системата и начупените линии. Затова броят на решенията на системата е равен на броя на начупените линии от описания вид, тоест на числото на Каталан $\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Задача 5. Ако броят на върховете n е нечетно число, то те не могат да се разделят на двойки, тоест в този случай пълният граф не съдържа нито едно съвършено съчетание и отговорът е 0.

Затова нека n е четно число. Избираме произволен връх на графа. Той може да се съчетае с кой да е от другите $n-1$ върха. След като изберем ребро през този връх, махаме двата края на реброто. Остават $n-2$ върха. Пак избираме един от тях произволно. Той може да се съчетае с който и да било от другите $n-3$ върха. Избираме един от тях и изтриваме тези два върха. Като продължим тези разсъждения, установяваме, че броят на съвършените съчетания е равен на $(n-1)(n-3)(n-5)\,\ldots\,5\,.\,3\,.\,1 = (n-1)!!$, т.е. произведението на нечетните числа от 1 до n.

Задача 6. Между забранените подмножества (мултимножества) от двата вида има биекция, запазваща сборовете от техните елементи:

— числа, които се делят на 4: $\{4\}$, $\{8\}$, $\{12\}$, $\ldots$, $\{4k\}$, $\ldots$

— повторени четни числа: $\{2\,;\,2\}$, $\{4\,;\,4\}$, $\{6\,;\,6\}$, $\ldots$, $\{2k\,;\,2k\}$, $\ldots$

Биекцията между забранените подмножества поражда биекция между "лошите" разбивания. Следователно те са равен брой, значи и "добрите" разбивания са равен брой.